2020年2月6日(木)

応用複素解析・物理数学2　追試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

必修問題

I. ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ \ z = x + iy$ とする。
このとき、u, v は、次のコーシー・リーマンの関係式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(1) u, v が、次のラプラス方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

(2) 次の関数が正則か否か判定せよ。また、その理由を示せ。

$$(a)\ f = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy)), \qquad (b)\ f = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$$

(3)　ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u + iv$ とする。v が y のみの関数のとき、$f(z)$ を求めよ。

II. テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ において、$\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \frac{1}{R},\ (0 \le R \le \infty)$ となるとき、R は、この級数の収束半径である。次の級数の収束半径を求めよ。

$$(1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} z^n \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$$

III.　n を自然数とする。
z を複素数として、$z^n = -i$ を満たす z のうち、異なるものは n 個ある。それらを、$z_1, z_2, \cdots, z_n$ とする。
(1) $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を求めよ。
(2) $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$ を示せ。

IV. 次の関数の無限遠点以外の孤立特異点を全て求めよ。また、各々の孤立特異点について、その種類（除きうる特異点か、極か、真性特異点か）を答えよ。

$$(1)\ \frac{\cos z}{z} \qquad (2)\ \frac{1-\cos z}{z^2} \qquad (3)\ \cos\frac{1}{z^2}$$

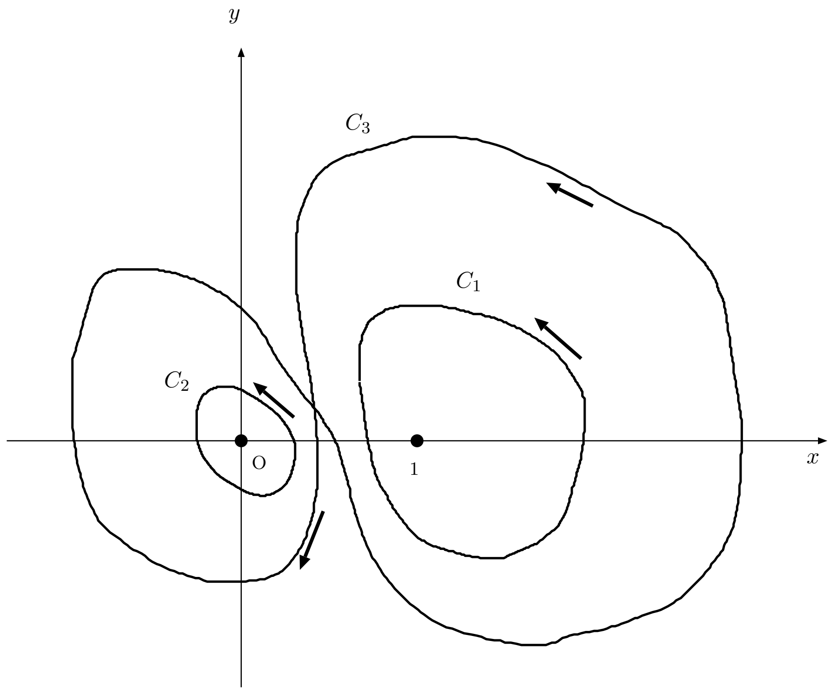
V. C を始点 z_0、終点が z_1 の任意の曲線とする。次の積分を求めよ。

$$(1)\ \int_c \frac{1}{(z+1)^2} dz \quad \text{但し、} C \text{ は点 } z=-1 \text{ を通らないとする} \quad (2)\ \int_c \cosh(z) dz$$

VI. 関数 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$ について以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ の無限遠点以外の全ての孤立特異点と、その点における留数を求めよ。

(2) 留数定理を利用して、以下の積分路 C_1, C_2, C_3 に沿う $f(z)$ の線積分を求めよ。但し、向きは図に示した矢印の向きとし、いずれも、1 周する経路とする。



選択問題

以下の 2 問のうちいずれかを選択して回答せよ。

VII-1. C を点 $-i$ のまわりを反時計回りに1 周する半径1 の円とする。そのパラメータ表示を

$$z(\theta)=e^{i\theta}-i, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

とする。n を整数とするとき、C に沿う次の線積分を、全ての n について、パラメータ表示を用いて計算せよ。

$$\int_C (z+i)^n dz$$

VII-2. 複素関数 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ の $z=-i$ を中心とするローラン展開をすべて求めよ。
ヒント 関数 $f(z)$ は分母が 0 になる点 $z=i$ と $z=-i$ の点で正則ではない。$z=-i$ を中心として $2<|z+i|$ の領域 A および $0<|z+i|<2$ の領域 B に分けて考える。それぞれの領域では $f(z)$ は正則。