

応用複素解析 試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

必修問題

I-1. ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ とする。このとき、 u, v は、次のコーシー・リーマンの関係式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

次の関数が正則か否か判定せよ。また、その理由を示せ。

$$(a) f = \frac{1}{x - iy}, (b) f = \frac{1}{x + iy}.$$

I-2.

(1) a, z を複素数とするとき、 z^a は、 $z^a = e^{a \log z}$ で定義される。 $\log z$ は一般に多価関数なので、 z^a も一般に多価関数となる。以下の値を求めよ。

$$(a) \log(1 + i), \quad (b) i^{1/2}$$

(2) 次の方程式の解を全て求めよ。

$$(a) e^z = -i, \quad (b) e^z = 2.$$

II. テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ において、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{R}$, ($0 \leq R \leq \infty$) となると、 R は、この級数の収束半径である。次の級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^{2n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2} z^n$$

III. n を自然数とする。

z を複素数として、 $z^n = -1$ を満たす z のうち、異なるものは n 個ある。それらを、 z_1, z_2, \dots, z_n とする。

(1) z_1, z_2, \dots, z_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n z_k = 0$ を示せ。

IV. 次の関数の無限遠点以外の孤立特異点を全て求めよ。また、各々の孤立特異点について、その種類（除きうる特異点か、極か、真性特異点か）を答えよ。

$$(1) \tan z \quad (2) \frac{\sin z}{z} \quad (3) \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

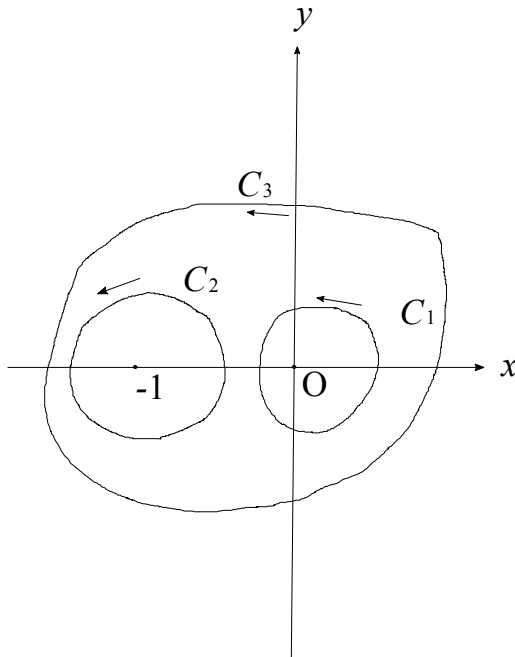
V. C を始点 z_0 、終点が z_1 の任意の曲線とする。次の積分を求めよ。

$$(1) \int_C \frac{1}{(z-1)^4} dz \quad \text{但し、} C \text{ は点 } z=1 \text{ を通らないとする} \quad (2) \int_C \cos(iz) dz$$

VI. 関数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ について以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ の無限遠点以外の全ての孤立特異点と、その点における留数を求めよ。

(2) 留数定理を利用して、以下の積分路 C_1, C_2, C_3 に沿う $f(z)$ の線積分を求めよ。但し、向きは図に示した矢印の向きとし、いずれも、1周する経路とする。



選択問題

以下の2問のうちいずれかを選択して回答せよ。

VII-1. C を点 $2i$ のまわりを反時計回りに1周する半径1の円とする。そのパラメータ表示を

$$z(\theta) = e^{i\theta} + 2i, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

とする。 n を整数とするとき、 C に沿う次の線積分を、全ての n について、パラメータ表示を用いて計算せよ。

$$\int_C (z - 2i)^n dz$$

VII-2. 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ の $z=2$ を中心とするローラン展開をすべて求めよ。ヒント 関数 $f(z)$ は分母が0になる点 $z=0$ と $z=2$ の点で正則ではない。 $z=2$ を中心として $2 < |z-2|$ の領域 A および $0 < |z-2| < 2$ の領域 B に分けて考える。それぞれの領域では $f(z)$ は正則。