2020年1月30日(木)

応用複素解析・ 物理数学2　試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

必修問題

I. ある領域で正則な複素関数を $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ \ z=x+iy$ とする。
(1) 次のコーシー・リーマンの関係式を示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 次の関数が正則か否か判定せよ。また、その理由を示せ。

$$(a)\ f=e^{x^2+y^2}(\cos(2xy)+i\sin(2xy)),\qquad (b)\ f=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

(3) a,z を複素数とするとき、z^a は、$z^a=e^{a\log z}$ で定義される。$\log z$ は一般に多価関数なので、z^a も一般に多価関数となる。以下の値を求めよ。

$$(a)\ 1^i,\qquad (b)\ i^i$$

II. テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ において、$\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}|=\frac{1}{R},\ (0\le R\le\infty)$ となるとき、R は、この級数の収束半径である。次の級数の収束半径を求めよ。

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/3}z^n\quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$$

III.　n を自然数とする。
z を複素数として、$z^n=i$ を満たす z のうち、異なるものは n 個ある。それらを、$z_1,z_2,\cdots,z_n$ とする。
(1) $z_1,z_2,\cdots,z_n$ を求めよ。
(2) $\sum_{k=1}^{n}z_k=0$ を示せ。

IV. 次の関数の無限遠点以外の孤立特異点を全て求めよ。また、各々の孤立特異点について、その種類（除きうる特異点か、極か、真性特異点か）を答えよ。

$$(1)\ \frac{\sin z}{z}\quad (2)\ \frac{\sin z}{z^2}\quad (3)\ \sin\frac{1}{z^2}$$

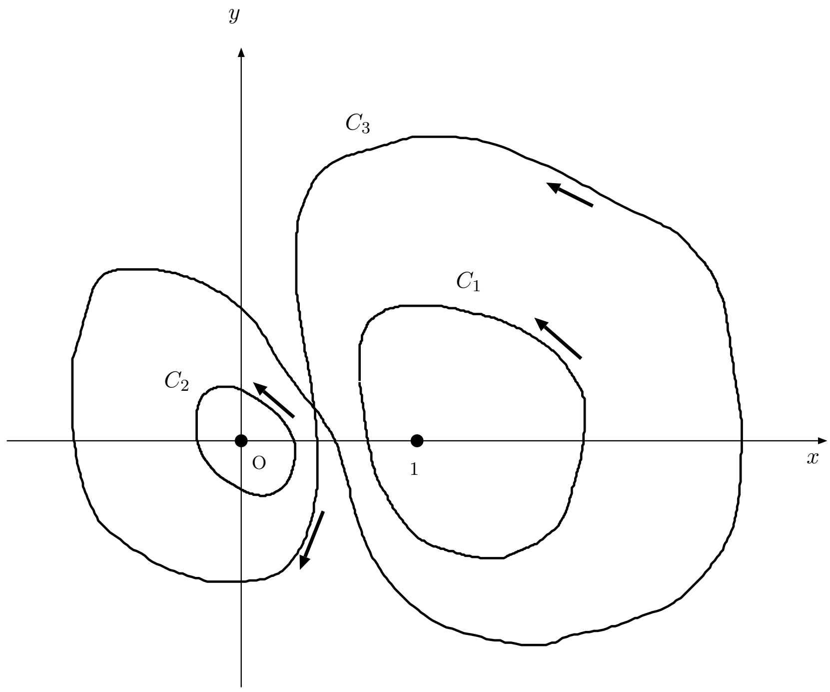
V. C を始点 z_0、終点が z_1 の任意の曲線とする。次の積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_c \frac{1}{(z+1)^4}dz$　　但し、C は点 $z=-1$ を通らないとする　(2) $\displaystyle\int_c \sin(iz)dz$

VI. 関数 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ について以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ の無限遠点以外の全ての孤立特異点と、その点における留数を求めよ。

(2) 留数定理を利用して、以下の積分路 C_1, C_2, C_3 に沿う $f(z)$ の線積分を求めよ。但し、向きは図に示した矢印の向きとし、いずれも、1 周する経路とする。



選択問題

以下の 2 問のうちいずれかを選択して回答せよ。

VII-1. C を点 i のまわりを反時計回りに1 周する半径1 の円とする。そのパラメータ表示を

$$z(\theta)=e^{i\theta}+i,\quad \theta\in[0,2\pi]$$

とする。n を整数とするとき、C に沿う次の線積分を、全ての n について、パラメータ表示を用いて計算せよ。

$$\int_C (z-i)^n dz$$

VII-2. 複素関数 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ の $z=i$ を中心とするローラン展開をすべて求めよ。
ヒント 関数 $f(z)$ は分母が 0 になる点 $z=i$ と $z=-i$ の点で正則ではない。$z=i$ を中心として $2<|z-i|$ の領域 A および $0<|z-i|<2$ の領域 B に分けて考える。それぞれの領域では $f(z)$ は正則。