

応用複素解析・物理数学2 試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

必修問題

I. ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ とする。

(1) 次のコーシー・リーマンの関係式を示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 次の関数が正則か否か判定せよ。また、その理由を示せ。

$$(a) f = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (b) f = x^2 - y^2 - 2ixy$$

(3) ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u + iv$ とする。 u が y のみの関数のとき、 $f(z)$ を求めよ。

II. テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ において、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{R}$, ($0 \leq R \leq \infty$) となるとき、 R は、この級数の収束半径である。次の級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} z^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} a^{-2n} z^n \quad (a > 0)$$

III. n を自然数とする。

z の n 乗根、つまり、 $z^n = 1$ を満たす z のうち、異なるものは n 個ある。それらを、 z_1, z_2, \dots, z_n とする。

(1) z_1, z_2, \dots, z_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n z_k = 0$ を示せ。

(3) $z^n = i$ の異なる n 個の根 w_1, w_2, \dots, w_n を求めよ。

(4) $\sum_{k=1}^n w_k$ を求めよ。

IV. 次の関数の無限遠点以外の孤立特異点を全て求めよ。また、各々の孤立特異点について、その種類（除きうる特異点か、極か、真性特異点か）を答えよ。

$$(1) \frac{1}{\cos z} \quad (2) \cos \frac{1}{z}$$

V. C を始点 z_0 、終点が z_1 の任意の曲線とする。次の積分を求めよ。

$$(1) \int_c \frac{1}{(z-a)^3} dz \quad \text{但し、} C \text{ は点 } a \text{ を通らないとする} \quad (2) \int_c \sinh z dz$$

VI. 積分路 C を原点のまわりを反時計回りに 1 周する円とする。そのパラメータ表

示を

$$z(\theta) = re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

とするとき、関数 $f(z) = z^n$ の C に沿った線積分を全ての整数 n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) について、パラメータを用いた積分計算によって求めよ。

選択問題

以下の 2 問のうちいずれかを選択して回答せよ。

VII-1. 留数定理を利用して、次の積分を求めよ。

$$\int_C \frac{2}{z(2z-1)} dz$$

但し、 C は原点のまわりを反時計回りに 1 周する半径 1 の円。

VII-2. 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^2-4}$ の $z=2$ を中心とするローラン展開をすべて求めよ。

ヒント 関数 $f(z)$ は分母が 0 になる点 $z=2$ と $z=-2$ の点で正則ではない。 $z=2$ を中心として

$$4 < |z-2| \text{ の領域 A および } 0 < |z-2| < 4 \text{ の領域 B}$$

に分けて考える。それぞれの領域では $f(z)$ は正則。