2019年2月7日(木)

応用複素解析・物理数学２ 追試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

必修問題

I. ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\quad z = x + iy$ とする。
この時、次のコーシー・リーマンの関係式が成立する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(1) u, v がラプラス方程式 (1) を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

(2) 次の関数が正則か否か判定せよ。また、その理由を示せ。

$$(a)\ f = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (b)\ f = e^x(\cos y + i \sin y)$$

(3)　ある領域で正則な複素関数を $f(z) = u + iv$ とする。v が y のみの関数のとき、$f(z)$ を求めよ。

II. テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ において、$\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \frac{1}{R}$, $(0 \le R \le \infty)$ となるとき、R は、この級数の収束半径である。次の級数の収束半径を求めよ。

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} z^n \quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} z^n\ (a > 0)$$

III.　n を自然数とする。
$z^n = -i$ を満たす z のうち、異なるものは n 個ある。それらを、$z_1, z_2, \cdots, z_n$ とする。
(1) $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を求めよ。
(2) $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$ を示せ。

IV. 次の関数の無限遠点以外の孤立特異点を全て求めよ。また、各々の孤立特異点について、その種類（除きうる特異点か、極か、真性特異点か）を答えよ。

$$(1)\ \frac{1}{\sin z} \qquad (2)\ e^{\frac{1}{z}}$$

V. C を始点 z_0、終点が z_1 の任意の曲線とする。次の積分を求めよ。

$$(1)\ \int_c \frac{1}{(z-a)^2}dz \quad \text{但し、} C \text{ は点 } a \text{ を通らないとする} \quad (2)\ \int_c e^z dz$$

VI. 積分路 C を $z=-1$ のまわりを反時計回りに 1 周する円とする。そのパラメー

タ表示を
$z(\theta)=-1+re^{i\theta},\ \ \theta\in[0,2\pi]$
とするとき、関数 $f(z)=(z+1)^n$ の C に沿った線積分を全ての整数 n $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ について、パラメータを用いた積分計算によって求めよ。

選択問題

以下の 2 問のうちいずれかを選択して回答せよ。

VII-1. 留数定理を利用して，次の積分を求めよ。

$$\int_C \frac{1}{z(z+2)}dz$$

但し、C は原点のまわりを反時計回りに 1 周する半径 1 の円。

VII-2. 複素関数 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ の原点を中心とするロー ラン展開をすべて求めよ。
ヒント 関数 $f(z)$ は分母が 0 になる点 $z=0$ と $z=1$ の点で正則ではない。$z=0$ を中心として

$$1<|z| \text{ の領域 A} \quad \text{および} \quad 0<|z|<1 \text{ の領域 B}$$

に分けて考える。それぞれの領域では $f(z)$ は正則。