2019年8月20日(火)

ベクトル解析 追試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$として，次の微分演算の結果がスカラーかベクトルかを答え、その値を求めよ。

$$(1)\quad \nabla \cdot \boldsymbol{r} \quad (2)\quad \nabla \times \boldsymbol{r} \quad (3)\quad \nabla \frac{1}{r} \quad (4)\quad \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \quad (5)\quad \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{r}\right)$$

II.

(1) C^2級のスカラー場$\phi(x, y, z)$について，次のことを示せ.

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0.$$

(2) C^2級のベクトル場$\boldsymbol{A}(x, y, z)$について，次のことを示せ.

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \boldsymbol{A}\right) = 0.$$

II. 図のように無限に長い中空の円筒の表面に大きさIの定常電流が流れている。円筒の断面は，半径aの円であるとする。電流は円筒表面を一様に流れているとし，円筒の中心軸をz軸とする。また，電流の向きをz軸の正の方向とする。

磁場を$\boldsymbol{H}$，電流密度を$\boldsymbol{i}$としたとき，マックスウェルの方程式の一つは,

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$$

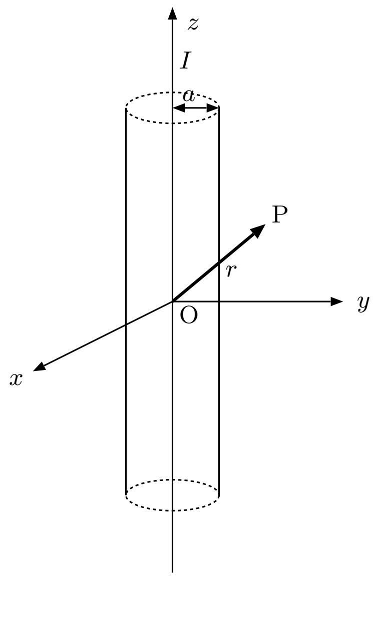
で与えられる。円筒座標$\boldsymbol{r} = (\rho, \phi, z)$の点Pにおける，定常電流による磁場$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$を考える。

(1) 点Pにおける磁場の向きを理由とともに答えよ。

(2) 以下の領域における磁場の大きさを求めよ。

(a) 円筒の外側 $(a < \rho)$

(b) 円筒の内側 $(\rho < a)$



III. 図のように，真空中に，電荷Qが一様に分布している半径Rの球が置かれている。球の中心を原点Oとして下図のように座標系をとる。電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を ρ，真空の誘電率を ε_0としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

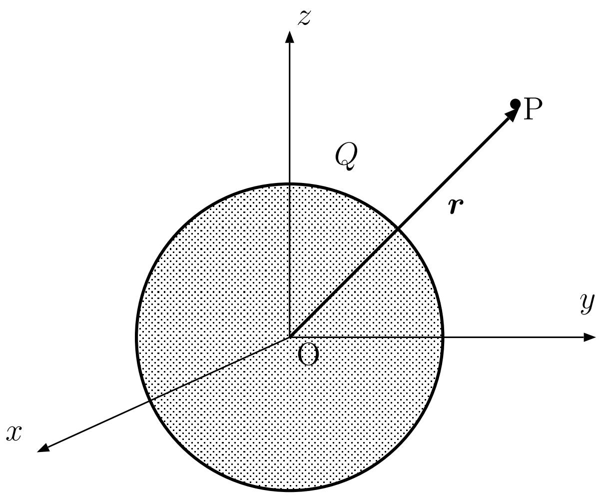
で与えられる。

(1) 座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$の点Pにおける電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$の向きを理由とともに答えよ。

(2) 式(1)とガウスの定理を用いることにより、電場の大きさを以下の場合について求めよ。

(a) 球の外側 $(R < r)$　(b) 球の内部 $(r < R)$

ここで，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$である。



IV. 球座標系において，曲線座標は $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 (x, y, z) を球座標系の座標 (r, θ, ϕ) で表せ。
2. $i = 1, 2, 3$について，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を計算せよ。
3. $\boldsymbol{f}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$，$h_i = |\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}|$とする。$h_1, h_2, h_3$を求めよ。また，$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ は規格直交系をなすことを示せ。

V. 次のことを証明せよ。

1. エルミート行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。ただし、エルミート行列の固有値は実数ということは既知とする。
2. エルミート行列はユニタリ行列で対角化できる。ただし、簡単のため、エルミート行列の固有値は縮退していないとする。