2018 年 7 月 31 日 (火)

# ベクトル解析・ 物理数学1　追試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とし，$\boldsymbol{H} = (H_x, H_u, H_z)$ を定数ベクトル (成分が $x, y, z$ に依存しない) とする。

1. $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r}$ の $x, y, z$ 成分を求めよ。
2. 以下の微分演算の結果がスカラーかベクトルかを答え、その値を求めよ。
   (1) $\nabla \times \boldsymbol{r}$　(2) $\nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r})$
   (3) $\nabla \times (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r})$　(4) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

II. $C^2$ 級のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について，次のことを示せ.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0.$$

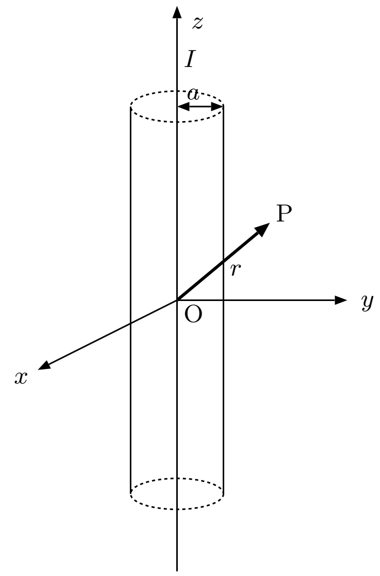
III. 無限に長い中空の円筒の表面に大きさ $I$ の定常電流が流れている。ここで，円筒の断面は，半径 $a$ の円であるとする。電流は円筒表面を一様に流れているとし，円筒の中心軸を $z$ 軸とする。また，電流の向きを $z$ 軸の正の方向とする。下図参照。

磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{1}$$

で与えられる。点 P の円筒座標を $\boldsymbol{r} = (\rho, \phi, z)$ とし、磁場 $\boldsymbol{H}$ の円筒座標系での成分を $H_\rho, H_\phi, H_z$ とする。( 図は、点 P が円筒の外側にある場合。) マックスウェルの方程式 (1) を用い、さらにストークスの定理を適用して、次の領域における磁場の成分 $H_\rho, H_\phi, H_z$ を求めよ。

(a) 円筒の外側 $(a < \rho)$　(b) 円筒の内側 $(\rho < a)$



IV. 真空中に置かれた半径 $R$ の球殻を考える。球殻には電荷 $Q$ が与えられている。電荷分布は一様であるとする。球の中心を原点 O として図のように座標系をとる。

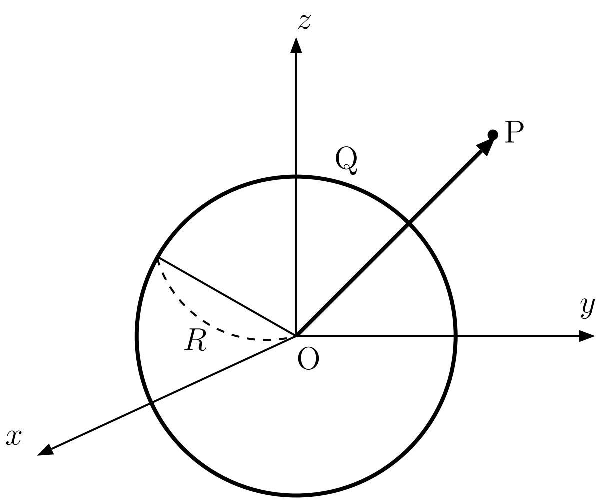
電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を $\rho$，真空の誘電率を $\varepsilon_0$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

で与えられる。この式とガウスの定理を用いることにより，座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の点 P における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の球座標系での成分、$E_r, E_\theta, E_\phi$ を

(a) 球殻の外側 $(R < r)$　(b) 球殻の内側 $(r < R)$

の場合について求めよ。ここで，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。




V. 円筒座標系において，曲線座標は $(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \phi, z)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 $(x, y, z)$ を円筒座標系の座標 $(\rho, \phi, z)$ で表せ。
2. $i = 1, 2, 3$ について，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を計算せよ。
3. $\boldsymbol{f}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$, $h_i = |\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}|$ とする。$h_1, h_2, h_3$ を求めよ。また，$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ は規格直交系をなすことを示せ。

VI. 次のことを証明せよ。

1. エルミート行列の固有値は実数である。
2. エルミート行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。