2020 年 8 月 18 日 (火)

ベクトル解析 試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. $\boldsymbol{r} = (x, y, z),\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とし，$\boldsymbol{H} = (H_x, H_y, H_z)$ を定数ベクトル (成分が x, y, z に依存しない) とする。

1. $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r}$ の x, y, z 成分を求めよ。

2. 以下の微分演算の結果がスカラーかベクトルかを答え、その値を求めよ。
   (1) $\nabla \times \boldsymbol{r}$ (2) $\nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r})$
   (3) $\nabla \times (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r})$ (4) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

II. C^2 級のスカラー場 $\phi(x, y, z)$ について，次のことを示せ.

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0.$$

III. 図のように，内径 b，外径 c の無限に長い中空円筒導体内に，それと同じ中心軸を持つ半径 a の無限に長い円筒導体が配置されている．共通の中心軸を z 軸として，図の向きを z 軸の正の向きにとる．内側の円筒導体には強さ I の定常電流が z 軸の正の向きに，中空の円筒導体には強さ I の定常電流が z 軸の負の向きに、ともに，導体内を一様に流れているとする．磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

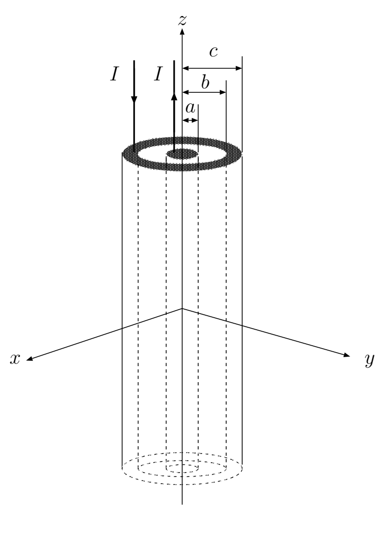
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{1}$$

で与えられる。円筒座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z$ とする。

1. $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向を向き、大きさは ρ のみに依存することを説明せよ。

2. マックスウェルの方程式 (1) を用い，さらにストークスの定理を適用して，次の領域における磁場の $\boldsymbol{e}_\phi$ 成分，H_ϕ を求めよ。

(a) $\rho < a$ (b) $a \leq \rho < b$ (c) $b \leq \rho < c$ (d) $c \leq \rho$



IV. 半径 a の球に電荷 Q が**一様に**分布している。球の中心を原点 O として下図のように座標系をとる。

電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を ρ，真空の誘電率を ε_0 としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

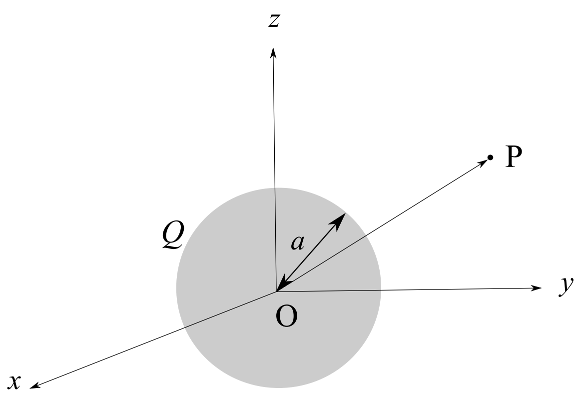
で与えられる。球座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ とする。

(1) 座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の点 P における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{e}_r$ 方向を向き、大きさは r のみに依存することを説明せよ。

(2) 式 (2) とガウスの定理を用いることにより、電場の $\boldsymbol{e}_r$ 成分 E_r を以下の場合について求めよ。

(a) 球の外側 $(a < r)$　(b) 球の内部 $(r < a)$

ここで，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。



V. 球座標系において，曲線座標は $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 (x, y, z) を球座標系の座標 (r, θ, ϕ) で表せ。

2. $i = 1, 2, 3$ について，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を計算せよ。

3. $\boldsymbol{f}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$, $h_i = |\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}|$ とする。h_1, h_2, h_3 を求めよ。また，$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ は規格直交系をなすことを示せ。

VI. 次のことを証明せよ。

1. エルミート行列はユニタリ行列で対角化できることを示せ。ただし、エルミート行列の固有値は実数であることは既知とする。また、固有値は縮退していない (固有値が全て異なる) とする。

2. ユニタリ行列の固有値の絶対値は１である。