2018年7月24日(火)

ベクトル解析・物理数学1　試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ として，次の微分演算の結果がスカラーかベクトルかを答え、その値を求めよ。

$$(1) \quad \nabla \frac{1}{r} \quad (2) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{r} \quad (3) \quad \nabla \times \boldsymbol{r}$$

II. C^2 級のスカラー場 $\phi(x, y, z)$ について，次のことを示せ.

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0.$$

III. 図のように，無限に長い円柱に大きさ I の定常電流が流れている。ここで，円柱の断面は半径 a の円であるとする。電流は円柱内を一様に流れているとし，円柱の中心軸を z 軸とする。また，電流の向きを z 軸の正の方向とする。

磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

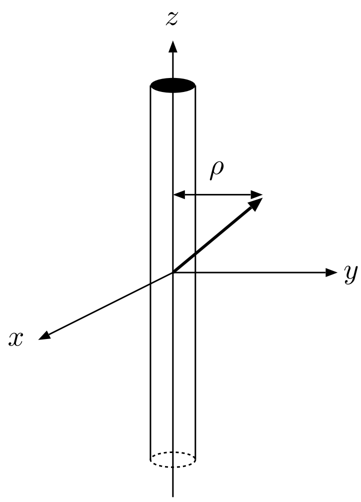
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{1}$$

で与えられる。

(1) 点Pの z 軸からの距離を $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする。点Pにおける磁場の向きを理由とともに答えよ。

(2) 式 (1) とストークスの定理を用いて、以下の点Pにおける磁場の大きさを求めよ。

(a) 円柱の外側 $(a < \rho)$　(b) 円柱の内側 $(\rho \leq a)$



IV. 半径 R の球に電荷 Q が一様に分布している。球の中心を原点 O として下図のように座標系をとる。

電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を ρ，真空の誘電率を ε_0 としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

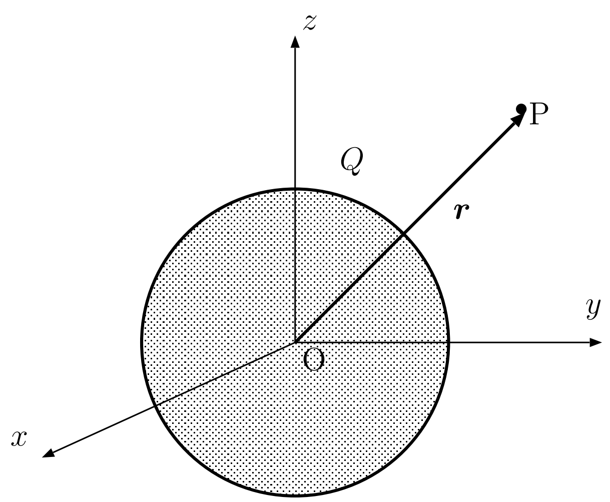
で与えられる。

(1) 座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の点 P における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の向きを理由とともに答えよ。

(2) 式 (2) とガウスの定理を用いることにより、電場の大きさを以下の場合について求めよ。

(a) 球の外側 $(R < r)$ (b) 球の内部 $(r < R)$

ここで，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。



V. 球座標系において，曲線座標は $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 (x, y, z) を球座標系の座標 (r, θ, ϕ) で表せ。
2. $i = 1, 2, 3$ について，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を計算せよ。
3. $\boldsymbol{f}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$, $h_i = |\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}|$ とする。h_1, h_2, h_3 を求めよ。また，$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ は規格直交系をなすことを示せ。

VI. 次のことを証明せよ。

1. エルミート行列の固有値は実数である。
2. ユニタリ行列の固有値の絶対値は1 である。