2017.5.23

# ベクトル解析・物理数学１ 第１回レポート問題

**締切り　６月９日（金）５時　（厳守 !! ）、　提出先　学務課理学部係**
**具体的な計算過程も全て記すこと。**

I. 自然数 $(1, 2, \cdots, n)$ の並べ替え（置換）を，$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ とする。２つの数字，$i_l, i_m$ の入れ替え（互換）を繰り返して，$(1, 2, \cdots, n)$ にするときの互換の回数を $P$ とすると，$P$ の偶奇性は置換 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ によって決まっていることを示せ。すなわち，別の互換の繰り返しで，$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ から，$(1, 2, \cdots, n)$ にしたときの互換の回数を $Q$ とすると，$P$ が偶数なら $Q$ も偶数であり，$P$ が奇数なら $Q$ も奇数となることを示せ。

II. レビーチビタ記号 $\epsilon_{ijk}$ について以下のことを示せ。
$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が規格直交系をなし、また、右手系であるとする。すなわち

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{i,j}, i, j = 1, 2, 3, \quad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \tag{1}$$

1. レビーチビタ記号 $\epsilon_{ijk}$ がスカラ三重積で、以下のように表されることを示せ。

$$\epsilon_{ijk} \quad = \quad (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) \tag{2}$$

2. (2) より、$\boldsymbol{e}_i$ を列ベクトルとするとき、行列式を用いて、

$$\epsilon_{ijk} \quad = \quad |\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k| \tag{3}$$

となる。(3) を用いて、 レビーチビタ記号 $\epsilon_{ijk}$ が、以下の性質を持つことを示せ。

$$\epsilon_{ijk}\text{の任意の２つの添字を入れ換えると，符号が反転する。} \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{6}$$

ヒント。 (5) の左辺は,

$$\sum_{k=1}^{3} |\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_k| = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_l) & (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_m) & (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) \\ (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_l) & (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_m) & (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) \\ (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) & (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_m) & (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_k) \end{vmatrix} \tag{7}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$ は、$\boldsymbol{e}$ を転置した行ベクトル。

(6) も同様。

III.（線形代数の復習） $n \times n$ 行列について、以下の問いに答えよ。
1. 行列 $A$ のトレース（跡）は、$\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ で定義される。以下を示せ。

$$(a)\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

$$(b)\ \mathrm{Tr}(A_1A_2A_3\cdots A_k) = \mathrm{Tr}(A_2A_3A_4\cdots A_kA_1) = \cdots = \mathrm{Tr}(A_kA_1A_2\cdots A_{k-2}A_{k-1})$$

2. 行列 $A$ の行列式 $\det A$ について、以下を示せ。ただし、$A^{\mathrm{T}}$ は、$A$ の転置行列。

$$(a)\ \det(AB) = \det A \times \det B \qquad (b)\ \det A^{\mathrm{T}} = \det A$$

$$(c)\ \det A \neq 0 \text{ のとき、} \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

IV. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。$r \neq 0$ として、以下の問いに答えよ。
1. 以下を計算せよ。

$$(a)\ \nabla r \quad (b)\ \nabla \frac{1}{r}$$

2. 以下を示せ。

$$(a)\ \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}^3}{r} = 0 \quad (b)\ \nabla \times \frac{\boldsymbol{r}^3}{r} = 0$$

3. $\boldsymbol{A} = (x^2, xy, xyz)$ として、以下を計算せよ。

$$(a)\ \nabla \cdot \boldsymbol{A} \quad (b)\ \nabla \times \boldsymbol{A}$$