2017.8.12

物理学の法則

1　加速度運動をしている系での運動方程式

質量 m の物体の運動を一般的に考えます。地上に固定している点をOとして原点とします。物体の位置をPとします。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，点Oの位置ベクトルと呼ばれます。次に,運動している系（例えば阪大の問題の台）に固定されている点をO' とすると，点O' からみた物体の位置ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ となります。別の記号を用いて、$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{x'} = \overrightarrow{\mathrm{O'P}}$，また、$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ とします。$\overrightarrow{X}$ は、地上からみた運動している系に固定された点O' の位置ベクトルです。高校ではきちんと言いませんが，速度は、位置ベクトルを時間で微分したものです。三次元の場合には、$\overrightarrow{x}$ をデカルト座標（普通の直交座標）で成分で表し、$\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ とすると、速度ベクトルは

$$\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$$

です。また加速度ベクトルは速度ベクトルを時間で微分したものです。したがって，位置ベクトルを時間で２階微分したものです。

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}) = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}).$$

他のベクトルも同様で、$\overrightarrow{x'}$ を動いている系に固定しているデカルト座標で表すと、$\overrightarrow{x'} = (x', y', z')$, 速度ベクトルは,

$$\overrightarrow{v'} = ({v_x}', {v_y}', {v_z}') = (\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}),$$

加速度ベクトルは

$$\overrightarrow{a'} = ({a_x}', {a_y}', {a_z}') = (\frac{d{v_x}'}{dt}, \frac{d{v_y}'}{dt}, \frac{d{v_z}'}{dt}) = (\frac{d^2x'}{dt^2}, \frac{d^2y'}{dt^2}, \frac{d^2z'}{dt^2})$$

となります。また、動いている系の点O' を地上から見た位置ベクトルの成分を $\overrightarrow{X} = (X, Y, Z)$ とすると、速度ベクトルは

$$\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z) = (\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt})$$

です。また加速度ベクトルは

$$\overrightarrow{A} = (A_x, A_y, A_z) = (\frac{dV_x}{dt}, \frac{dV_y}{dt}, \frac{dV_z}{dt}) = (\frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2Y}{dt^2}, \frac{d^2Z}{dt^2}).$$

ベクトルの関係式

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$

より、

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{x'}.$$

両辺を t で微分すると、

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{v'}.$$

さらに、両辺を t で微分すると、

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{a'}.$$

$\overrightarrow{V}, \overrightarrow{A}$ は運動している系の速度と加速度、$\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{a'}$ は運動している系からみた物体の速度と加速度です。一方，地上で見ると、ニュートンの運動方程式が成り立つので、

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}. \tag{1}$$

$\overrightarrow{F}$ は、物体に働いているすべての力の和です。運動方程式 (1) に，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{a'}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} m(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{a'}) &= \overrightarrow{F}, \qquad (2) \\ m\overrightarrow{a'} &= \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{A} \qquad (3) \end{aligned}$$

となります。つまり、運動している系からみた物体には、実際の力以外に、$-m\overrightarrow{A}$ の力がかかっているように見えます。これは、慣性力と呼ばれます。運動している系が一定の速度で運動していて加速度が０なら、慣性力は０ですが、運動している系が加速度運動していれば、-（物体の質量）×（運動している系の加速度）の力が働いているように見えます。

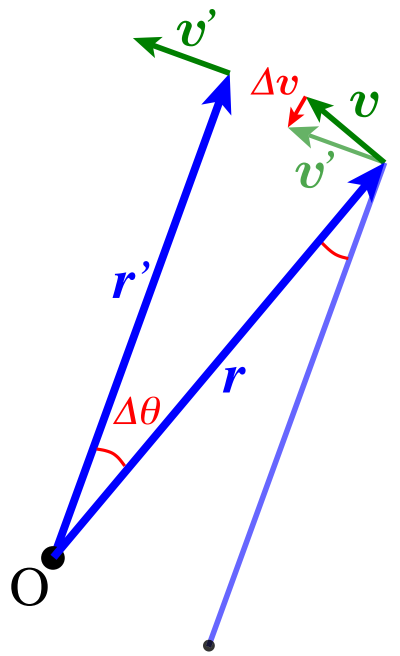

図 1: Explanation of acceleration of circular motion.

2　円周上を運動をしている物体の加速度

中心をOとして，半径 r の円周上を運動している質量 m の物体の運動を考えます。Δt 秒間に位置ベクトルが上の図の $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r}'$ になるとします。

また、速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{v}'$ になるとします。円周上の運動なので，位置ベクトルと速度ベクトルは常に直交します。したがって、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ のなす角は、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ のなす角 $\Delta\theta$ と同じです。位置ベクトルの変化量を $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ とすると、角度をラジアンではかるとすると、

$$|\Delta\boldsymbol{r}| \simeq r\Delta\theta.$$

ここで、$\simeq$ はほぼ等しいことを表す記号です。ただし、今は，図のように $\Delta\theta > 0$ と考えています。$|\Delta\boldsymbol{r}|$ は、ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}$ の大きさを表します。また、$r = |\boldsymbol{r}|$. 同様にして、$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ として，

$$|\Delta\boldsymbol{v}| \simeq v\Delta\theta.$$

ただし、$v = |\boldsymbol{v}|$. $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ を考えると、その大きさは，

$$|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}| = \frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t} \simeq r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

です。速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、位置ベクトルの微分なので、

$$|\boldsymbol{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} |\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}| = r \lim_{\Delta t \to 0} |\frac{\Delta \theta}{\Delta t}| = r\frac{d\theta}{dt}$$

ここで、$\frac{d\theta}{dt}$ は、回転角の（瞬間の）時間変化率、すなわち、円周上の運動の角速度 ω です。したがって,

$$v = \omega r.$$

$\boldsymbol{v}$ の向きは、円の接線方向で、$\boldsymbol{r}$ に垂直。加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ は、速度ベクトルの微分なので、

$$|\boldsymbol{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} |\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}| = v\frac{d\theta}{dt} = \omega v.$$

つまり、$a = |\boldsymbol{a}|$ として、

$$a = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

加速度の向きは，図から分かるように原点の方向。つまり、円運動の中心を向きます。

以上の議論は、等速円運動に限りません。円周上で速さが変わるような振り子などの運動でも、速度の大きさと向き、加速度の大きさと向きは，上のように表されます。したがって，円運動の時の円の中心方向の運動方程式は、

$$m\frac{v^2}{r} = F_r. \tag{4}$$

ここで、F_r は、すべての力の円の中心方向の成分の和。中心向きを正とします。

以上のことより、円運動をしている時には、必ず、$m\frac{v^2}{r}$ の大きさの力が中心向きに働く必要があり、これは向心力と呼ばれます。