訂正と問題解答

訂正

1. Page 172 の脚注 3)

   生物の固体数 $\rightarrow$ 　生物の個体数

問題解答

問 8.1
(1) $6(x^3+2x^2+5)^5(3x^2+4x)$ 　(2) $10x^4+12x^3+30x^2+40x+20$

問 8.2
(1) $2e^{2x}$ 　(2) $(3x^2+11x+15)e^{3x}$

問 8.3
(1) $\dfrac{1}{x\ln 10}$ 　(2) $\ln(x^2+2x+4)+\dfrac{2x(x+1)}{x^2+2x+4}$
(3) $-\dfrac{5x^2+18x+14}{(x^2+3x+4)^4}$

問 8.4
(1) $\cos(x^2+1)-2x^2\sin(x^2+1)$
(2) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ 　(ヒント: $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ として関数の商の微分の公式を使う)
(3) $\dfrac{2(x^3+4)\cos(2x)-3x^2\sin(2x)}{(x^3+4)^2}$

問 8.5
(1) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 　(2) $\dfrac{1}{1+x^2}$

問 8.6
(1) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+4x+C$ 　(2) $-\dfrac{\cos(2x+3)}{2}+C$ 　(3) $-\dfrac{e^{-3x}}{3}+C$
(4) $\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+C$ (ヒント: $\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$ を使う)

問 8.7
(1) $\dfrac{2x-1}{4}e^{2x}+C$ (2) $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$ (3) $\sin x-x\cos x+C$

問 8.8
(1) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ (2) $\sin^{-1}x+C$ (ヒント:$x=\sin\theta$ と変数変換する)

問 9.1
$C_1\sin x+C_2\cos x=0$ とする．$x=0,\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，$C_1=C_2=0$ となるので，独立である.

問 9.2
(1) $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$ (2) $y=Ce^{-\frac{1}{x}}$ (3) $y=\dfrac{C}{C+e^{-\lambda x}}$

問 9.3
(1) $y=x(C-\ln|x|)$
(2) $\dfrac{dz}{(z-2)(z+1)}=\dfrac{dx}{x}$ を変形すると，$\frac{1}{3}\big(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}\big)dz=\frac{dx}{x}$ となるので，これを積分して，$y=\frac{x(2+Cx^3)}{1-Cx^3}$ となる.

問 9.4
(1) $y=C_1e^{2x}-\dfrac{1}{2}$ (2) $y=C_1e^{-x}+x-1$

問 9.5
$y=C_1e^{2x}-\dfrac{1}{4}(2x^2+2x+1)$

問 9.6
まず，ロンスキー行列式 $\Delta(x)$ の表式を求めよう．$y_1(x),y_2(x)$ は，斉次方程式 (9.45) の解であるから，

$$y_1''(x)+2ay_1'(x)+by_1(x)=0, \quad (1)$$
$$y_2''(x)+2ay_2'(x)+by_2(x)=0 \quad (2)$$

が成り立つ．(2) $\times y_1$ - (1) $\times y_2$ とすると，

$$\Delta'(x)+2a\Delta(x)=0 \quad (3)$$

となるから，積分して，

$$\Delta(x) \quad = \quad e^{-2a(x-x_0)}\Delta(x_0) \quad (4)$$

となる．従って，$\Delta(x)$ は，恒等的に0であるか，あるいは決して0にならない.
さて，$y_1(x),y_2(x)$ が線形独立とは，$C_1y_1+C_2y_2=0$ ならば，$C_1=C_2=0$ と

なることであった．最初に，ロンスキー行列式 $\Delta(x)$ が 0 でないなら，線形独立であることを示す．背理法を用いる．線形独立でないなら，例えば $C_1 \neq 0$ で，$C_1y_1+C_2y_2=0$ が (a,b) で成り立つ．従って，$y_1 = -\dfrac{C_2}{C_1}y_2$ となる．これと，微分した式 $y_1' = -\dfrac{C_2}{C_1}y_2'$ を $\Delta(x)$ に代入すると，$\Delta(x)=0$ となる．従って，矛盾．逆に，線形独立ならロンスキー行列式が 0 にならないことを示す．このときも背理法を用いる．ある点で $\Delta(x)$ が 0 になるとする．すると，恒等的に $\Delta(x)=0$ である．従って，$y_1y_2' = y_1'y_2$ が常に成り立つ．独立性より $y_1y_2 \neq 0$ となる区間がある．従って，両辺を y_1y_2 で割ることにより，その区間で $\dfrac{y_1'}{y_1} = \dfrac{y_2'}{y_2}$ となる．これを積分すると，$\ln|y_1| = \ln|y_2| + C'$ となり，従って $y_1 = Cy_2$ となるが，これは，y_1, y_2 が独立でないことを意味する．よって矛盾．

問 10.1

(1) 時刻：$\dfrac{v_0}{g}\sin\theta$　高さ：$\dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$

(2) 時刻：$\dfrac{2v_0}{g}\sin\theta$　飛距離：$\dfrac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$

(3) $\sin(2\theta)=1$ より，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$　飛距離：$\dfrac{v_0^2}{g}$