

2015年度 修士論文

連想記憶型相互作用を有する古典XYモデルの 連続解の存在と安定性

奈良女子大学大学院人間文化研究科
博士前期課程物理学専攻
学籍番号 14810167

吉田梨紗

目次

1	Introduction	4
1.1	Hopfield model	4
1.2	XY model	4
1.3	目的	5
2	理論	5
2.1	連想記憶型相互作用	6
2.2	オーダーパラメータ	6
2.3	ハミルトニアン	6
2.4	パターン間の相関	7
2.5	自由エネルギーの導出	7
2.6	鞍点方程式 (SPEs)	9
2.7	鞍点方程式の解とその安定性の要約	13
2.7.1	$p = 2$ のとき	13
2.7.2	$p = 3$ のとき	15
2.8	連続解の特徴	18
2.9	$a = 0$ のときの連続解の存在	19
2.10	$a > 0$ のときの連続解の存在	19
2.11	連続解の安定性	20
2.11.1	$a = 0$ の場合	22
2.11.2	$a > 0$ の場合	24
3	数値計算	32
3.1	数値計算の方法	32
3.2	温度依存性	32
3.3	R_μ の時間変化	32
3.3.1	$a = 0$ の場合	33
3.3.2	$a > 0$ の場合	37
3.4	各解の R_μ 空間における位置関係	38
3.5	ノイズを加えた場合	42
4	まとめと考察	43
5	今後の課題	45
5.1	連続解の更なる特徴付け	45
5.2	p_c の N 依存性	46
5.3	レプリカ法を用いた解析	46

6	謝辞	46
7	付録	47
7.1	鞍点方程式の全ての解	47
7.1.1	$p = 2$ のとき	47
7.1.2	$p = 3$ のとき	51
7.2	関数 $u(x)$ の性質	64
7.3	$\{\eta_i^\mu\}$ についての関係の証明	65
7.4	連続解が存在する R_{1R} の範囲	70
7.5	その他の解の安定性	74
7.5.1	$p = 2$ のとき	74
7.5.2	$p = 3$ のとき	80
8	プログラム	96
8.1	温度依存性のプログラム (理論)	96
8.2	温度依存性のプログラム (数値計算)	101
8.3	R_μ の時系列のプログラム	106
8.4	$p = 3$ での連続解の理論値 R	112

1 Introduction

1.1 Hopfield model

本研究の基礎となるホップフィールドモデルについて説明する。ホップフィールドモデルは、自己結合型ニューラルネットワークモデルの代表とされているモデルである [1]。

脳には多数のニューロンという神経細胞があり、それらが繋がってネットワークが構成されている。ニューロンの働きをモデル化し、それらが繋がっているモデル、ニューラルネットワークモデルにより、脳の機能を解析する研究が数多く行われている [2] - [4]。脳内では情報がニューロンからニューロンへ、細胞内外の電位差によって信号が伝えられている。ある閾値を越えれば信号が伝えられ (発火)、閾値を越えなければ信号は伝わらない (非発火、静止)。ホップフィールドモデルでは、このニューロンの発火・静止を Ising スピンの上向き・下向きに対応させている。

パターン数を p 、ニューロンの総数を N としたとき、容量を $\alpha = \frac{p}{N}$ で表わす。ホップフィールドモデルでは、この α がある値 α_c を越えると埋め込んだ記憶パターンを思い出せず、記憶できなくなることが数値的研究により明らかになった [1]。又、統計力学的解析も行われ、 α_c の表式も得られている [5]-[7]。本研究は、ホップフィールドモデルを Ising スピンから XY スピン系に拡張したものである。

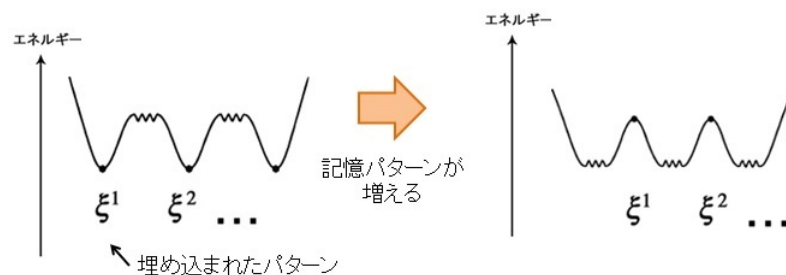


図 1: Hopfield model(文献 [7] より改変)

1.2 XY model

本研究では連想記憶型相互作用を持つ XY モデルを統計力学的に解析する。 N 個の XY スピンの i 番目を 2 次元ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= (X_i, Y_i) \\ &= (\cos \phi_i, \sin \phi_i) \end{aligned} \quad (1)$$

で表す。これは平面上を回転する振動子であり、状態空間は (X, Y) 平面で、 \mathbf{X}_i は原点を中心とした単位円上にある。

$$|\mathbf{X}_i| = 1 \quad (2)$$

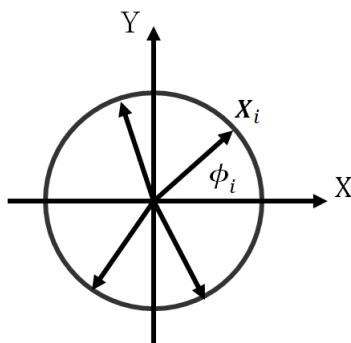


図 2: XYmodel

Ising モデルはスピンの値が ± 1 を取るのに対し、XY モデルは X_i, Y_i が連続的な値を取るモデルである。ハミルトニアンは相互作用を J_{ij} として、 $H = -\sum_{i<j} J_{ij} \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j$ で与えられる。

1.3 目的

本研究では古典 XY モデルにおいて、連想記憶型相互作用を考え、このとき現れるアトラクタ構造について解析する。Ising スピン系の Hopfield model では点アトラクタしか見られなかったが、先行研究では、XY スピン系に拡張することで新たなアトラクタ構造が表れることが確認されている [8]。すなわち、XY スピン系を用いると、各記憶パターンが独立に点アトラクタとなるのではなく、ある記憶パターンから別の記憶パターンを結ぶ曲線上の全ての点がアトラクタとなることがわかった。これを連続解、又は連続アトラクタ (Continuous Attractor, CA) と呼ぶ。本研究では、この連続解という新しい記憶状態が、温度 T によってどのように安定性を変化させるかを調べ、また解の存在条件を明らかにする。また、記憶パターン間に相関を持たせたときの記憶状態についても調べる。自由エネルギーの二階微分であるヘッセ行列を解析することにより、統計力学的に解の安定性解析を行い、又モンテカルロ法を用いた数値シミュレーションを行って、理論と比較する。

2 理論

本章では統計力学的な解析を行う。

2.1 連想記憶型相互作用

相互作用の式は、相互作用の強さを J 、XY スピンの数を N 、記憶させるパターンの総数を p とすると

$$J_{ij} = \frac{J}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 μ 番目の記憶パターンは $\xi^\mu = (\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_N^1)$ というベクトルで表し、 ξ_i^μ は ± 1 の値をとる。つまり p 個あるパターンにはそれぞれ N 個の ξ_i^μ が存在する。

2.2 オーダーパラメータ

$2p$ 個のオーダーパラメータ $R_{\mu R}$ と $R_{\mu I}$ を次のように定義する。

$$R_{\mu R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \cos \phi_i \quad (4)$$

$$R_{\mu I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \sin \phi_i \quad (5)$$

複素オーダーパラメータ W は次のように与えられる。

$$W = R_{\mu R} + iR_{\mu I} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu e^{i\phi_j} \quad (6)$$

更に、 μ 番目の記憶パターンをどれほど想起しているかを表す R_μ を次の様に定義し、それらの 2 乗和の平方根を R とする。

$$R_\mu = \sqrt{(R_{\mu R})^2 + (R_{\mu I})^2} \quad (7)$$

$$R = \sqrt{\sum_{\mu} R_\mu^2} \quad (8)$$

2.3 ハミルトニアン

XY モデルのハミルトニアンは、オーダーパラメータを用いて以下の様に書ける。

$$H = - \sum_{i < j} J_{ij} \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j \quad (9)$$

$$= - \frac{NJ}{2} \sum_{\mu=1}^p \{(R_{\mu R})^2 + (R_{\mu I})^2\} + \frac{Jp}{2} \quad (10)$$

2.4 パターン間の相関

相関とは、記憶する2つのパターン同士がどれだけ似ているかを表す値であり、これを a で表す。この値は2つの ξ の積の期待値になっている。

$$\begin{aligned}\langle \xi_i^\mu \xi_j^\nu \rangle &= \delta_{ij} \quad (\mu = \nu) \\ &= a\delta_{ij} \quad (\mu \neq \nu)\end{aligned}\quad (11)$$

相関 a を持つ記憶パターンの決定の仕方について説明する。まず親 ξ^0 を確率 $\frac{1}{2}$ で ± 1 と決める。次に ξ^μ を親と同じ符号になる確率 Q 、異なる確率を $1-Q$ とし発生させる。他のパターン ξ^ν も同様に決める。 a は ξ^μ と ξ^ν の積の期待値なので、以下の様に計算すると Q が求まる。

$$\begin{aligned}a &= \langle \xi^\mu \xi^\nu \rangle \\ &= (1 \times 1)Q^2 + 2 \times 1 \times (-1)Q(1-Q) + (-1) \times (-1)(1-Q)^2 \\ &= (2Q - 1)^2\end{aligned}\quad (12)$$

$$Q = \frac{\sqrt{a} + 1}{2}\quad (13)$$

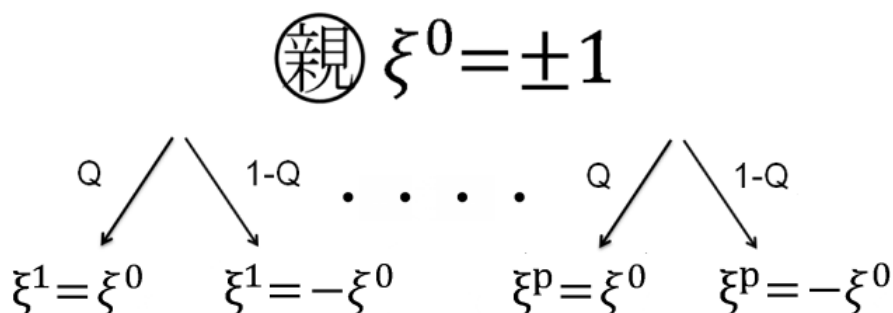


図 3: ξ^1, \dots, ξ^p を決定するまでの流れ

2.5 自由エネルギーの導出

XY モデルを統計力学的に解析するにあたって、温度 T を導入し、分配関数の計算をする。 $k_B = 1$ とする。すると $\beta = \frac{1}{T}$ なので、分配関数は $Z = \int d\phi_1 \dots d\phi_N e^{-\beta H}$ となる。 Z は次のようになる。

$$Z = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \dots d\phi_N e^{\frac{N\beta J}{2} \sum_{\mu=1}^p \{(R_{\mu R})^2 + (R_{\mu I})^2\} - \frac{\beta J p}{2}}\quad (14)$$

Z はバード・ストラトノビッチ変換を用いて、

$$Z = e^{-\frac{\beta J}{2}p} \int dy_c^1 \cdots dy_c^p dy_s^1 \cdots dy_s^p \left(\sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} \right)^{2p} \times \exp\left(-\frac{N\beta J}{2} \sum_{\mu=1}^N \{(y_c^\mu)^2 + (y_s^\mu)^2\} + \sum_{j=1}^N \ln(2\pi I_0(\beta J \Xi_j)) \right) \quad (15)$$

と表せる。ここで、

$$\Xi_j = \sqrt{\left(\sum_{\mu=1}^p \xi_j^\mu R_{\mu R} \right)^2 + \left(\sum_{\mu=1}^p \xi_j^\mu R_{\mu I} \right)^2} \quad (16)$$

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \phi} \cos(n\phi) d\phi \quad (17)$$

$I_n(x)$ は n 次の変形ベッセル関数。exp の中の N 次のオーダー以外の部分を定数 C とし、 N 次のオーダーを Nf とおく。

$$C = \left(\sqrt{\frac{N\beta J}{2\pi}} \right)^{2p} e^{-\frac{\beta J}{2}p} \quad (18)$$

$$Nf = -\frac{N\beta J}{2} \sum_{\mu=1}^N \{(y_c^\mu)^2 + (y_s^\mu)^2\} + \sum_{j=1}^N \ln(2\pi I_0(\beta J \Xi_j)) \quad (19)$$

$$Z = C \int dy_c^1 \cdots dy_c^p dy_s^1 \cdots dy_s^p e^{Nf} \quad (20)$$

$N \gg 1$ を考えるので、分配関数 Z を鞍点で評価すると、

$$Z \simeq C e^{Nf((y_c^1)^*, (y_c^2)^*, \dots, (y_c^p)^*, (y_s^1)^*, \dots, (y_s^p)^*)} = C e^{Nf^*} \quad (21)$$

ここで $(y_c^\mu)^*$, $(y_s^\mu)^*$ は f の鞍点で、 f^* は鞍点での f の値である。よって自由エネルギーは、

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z \simeq -\frac{1}{\beta} Nf^* \quad (22)$$

鞍点条件 $\frac{\partial f}{\partial y_c^\mu} = 0$ と $\frac{\partial f}{\partial y_s^\mu} = 0$ を計算すると、 $(y_c^\mu)^* = \langle R_{\mu R} \rangle$, $(y_s^\mu)^* = \langle R_{\mu I} \rangle$ が得られる。ここで $\langle A \rangle$ は統計力学的平均で、

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} e^{N\mathcal{H}} A d\Phi}{\int_0^{2\pi} e^{N\mathcal{H}} d\Phi} \quad (23)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{\beta J}{2} \sum_{\mu=1}^p \{(y_c^\mu)^2 + (y_s^\mu)^2\} + \beta J \sum_{\mu=1}^p (y_c^\mu \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \cos \phi_j + y_s^\mu \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \sin \phi_j) \quad (24)$$

ここで、

$$\int_0^{2\pi} d\Phi \equiv \int_0^{2\pi} d\phi_1 \cdots d\phi_N \quad (25)$$

以上から $(y_c^\mu)^*, (y_s^\mu)^*$ はオーダーパラメータの期待値であることがわかった。但し後の計算では簡単のため $\langle R_{\mu R} \rangle \rightarrow R_{\mu R}, \langle R_{\mu I} \rangle \rightarrow R_{\mu R}$ とする。従って自由エネルギーは式 (19) より、

$$F = -\frac{1}{\beta} N f^* = \frac{NJ}{2} R^2 - \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^N \ln(2\pi I_0(\beta J \Xi_j)) \quad (26)$$

となる。また、 $N \gg 2^p$ の場合を考えているので self-averaging より、 N 個の平均は $\{\xi_j^\mu\}$ についての平均となる。ここで $\{\xi_j^\mu\}$ 全体の平均を $[A(\{\xi^\mu\})]$ と表す。すると self-averaging により、

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A(\{\xi_j^\mu\}) = [A(\{\xi^\mu\})] \quad (27)$$

よって、

$$F = \frac{NJ}{2} R^2 - \frac{N}{\beta} \left[\ln(2\pi I_0(\beta J \Xi_j)) \right] \quad (28)$$

2.6 鞍点方程式 (SPEs)

$R_{\mu R}$ についての鞍点方程式 $\frac{\partial f}{\partial R_{\mu R}} = 0$ は、

$$\frac{\partial f}{\partial R_{\mu R}} = -\beta J R_{\mu R} + \beta J \sum_{\nu=1}^p \left[\frac{I_1(\beta J \Xi_j)}{I_0(\beta J \Xi_j)} \xi_j^\mu \xi_j^\nu \frac{1}{\Xi_j} \right] R_{\nu R} = 0 \quad (29)$$

となる。 $x_j = \beta J \Xi_j, u(x_j) = \frac{I_1(x_j)}{x I_0(x_j)}$ とすると、次式を得る。

$$R_{\mu R} = \beta J \sum_{\nu=1}^p \left[u(x_j) \xi_j^\mu \xi_j^\nu \right] R_{\nu R} \quad (30)$$

$$R_{\mu I} = \beta J \sum_{\nu=1}^p \left[u(x_j) \xi_j^\mu \xi_j^\nu \right] R_{\nu I} \quad (31)$$

関数 $u(x)$ は以下の性質を持つ。 $u(x)$ のグラフを図 4 に示す。

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{2} \\ u(x) &> 0 \quad , \quad x \geq 0 \\ u'(x) &< 0 \quad , \quad x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) &= 0 \end{aligned}$$

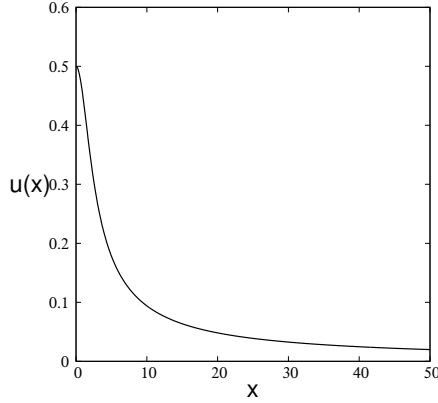


図 4: 関数 $u(x)$

ここでサブラティス Λ_l ($l = 1, \dots, 2^p$) を導入する。 i の集合である Λ_l では、 ξ_i^μ が値 η_l^μ をとる。

$$(\xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^p) = (\eta_l^1, \eta_l^2, \dots, \eta_l^p) \quad i \in \Lambda_l$$

サブラティスは、 $l = 1 \sim 2^{p-1}$ については $\eta_l^1 = 1$ として、 $(\eta_l^2, \dots, \eta_l^p)$ は全ての組み合わせとし、 $l = 2^{p-1} + 1, \dots, 2^p$ については

$$\eta_{l+2^{p-1}}^\mu = -\eta_l^\mu \quad (l = 1, \dots, 2^{p-1}, \mu = 1, \dots, p) \quad (32)$$

となるように決める。また、 $p+1$ のとき、 $l = 1 \sim 2^p$ の $\eta_l^{2,(p+1)}, \dots, \eta_l^{p+1,(p+1)}$ は p のときのサブラティスの値 $\eta_l^{\mu,(p)}$ と次の関係となるように決める。

$$\eta_l^{\mu,(p+1)} = \eta_l^{\mu-1,(p)} \quad (l = 1, \dots, 2^p, \mu = 2, \dots, p+1) \quad (33)$$

$j \in \Lambda_l$ のとき、 Ξ_j の値は同じなので、それを新たに Ξ_l と置く。

$$\Xi_l = \sqrt{\left(\sum_{\mu=1}^p R_{\mu R} \eta_l^\mu\right)^2 + \left(\sum_{\mu=1}^p R_{\mu I} \eta_l^\mu\right)^2} \quad (34)$$

$$\Xi_{l+2^{p-1}} = \Xi_l, (l = 1, 2, \dots, 2^{p-1}) \quad (35)$$

$\{\xi_i^\mu\}$ が l 番目のサブラティスでの値を取る確率を P_l とする。今 $2^p \ll N$ であり、self-averaging が成り立つので、次のように N 個の平均は $\{\xi_j^\mu\}$ についての平均となるが、それは更に確率 P_l を用いて表すことができる。

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\xi_j^\mu) = [g(\xi_j^\mu)] = \sum_{l=1}^{2^p} P_l g(\eta_l^\mu) \quad (36)$$

以上から鞍点方程式は更に書き換えられて、次のようになる。

$$R_{\mu R} = \beta J \sum_{\nu=1}^p c_{\mu\nu} R_{\nu R} \quad (37)$$

$$R_{\mu I} = \beta J \sum_{\nu=1}^p c_{\mu\nu} R_{\nu I} \quad (38)$$

ここで

$$c_{\mu\nu} \equiv \sum_{l=1}^{2^p} P_l u_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu = c_{\nu\mu} \quad (39)$$

$$u_l \equiv u(x_l), \quad x_l \equiv \beta J \Xi_l \quad (40)$$

$$\Xi_l = \sqrt{R^2 + 2 \sum_{\mu < \nu} \eta_l^\mu \eta_l^\nu (R_{\mu R} R_{\nu R} + R_{\mu I} R_{\nu I})} \quad (41)$$

これから、ある μ_0 番目について、 $R_{\mu_0 R} \rightarrow -R_{\mu_0 R}$, $R_{\mu_0 I} \rightarrow -R_{\mu_0 I}$ としたのもも解となるかについて調べる。鞍点方程式は、式 (30)、(31) から、

$$R_{\mu R} = \beta J \sum_{\nu=1}^p \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) \xi_j^\mu \xi_j^\nu R_{\nu R} \quad (42)$$

$$R_{\mu I} = \beta J \sum_{\nu=1}^p \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) \xi_j^\mu \xi_j^\nu R_{\nu I} \quad (43)$$

反転したものを、

$$R'_{\mu_0 R} = -R_{\mu_0 R}, \quad R'_{\nu R} = R_{\nu R} \quad (\nu \neq \mu_0) \quad (44)$$

とする。また

$$\xi_j^{\prime\mu_0} = -\xi_j^{\mu_0}, \quad \xi_j^{\prime\nu} = \xi_j^\nu \quad (\nu \neq \mu_0) \quad (45)$$

とおく。すると、

$\mu = \mu_0$ のとき

$$-R'_{\mu_0 R} = \beta J \left[\sum_{\nu \neq \mu_0} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) (-\xi_j^{\mu_0}) \xi_j^{\prime\nu} R'_{\nu R} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) (-\xi_j^{\mu_0})^2 (-R'_{\mu_0 R}) \right] \quad (46)$$

$$R'_{\mu_0 R} = \beta J \sum_{\nu} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) \xi_j^{\prime\mu_0} \xi_j^{\prime\nu} R'_{\nu R} \quad (47)$$

$\mu \neq \mu_0$ のとき

$$R'_{\mu R} = \beta J \left[\sum_{\nu \neq \mu_0} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) \xi_j^{\mu} \xi_j^{\nu} R_{\nu R} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) \xi_j^{\mu} (-\xi_j^{\mu_0}) (-R'_{\mu_0 R}) \right] \quad (48)$$

$$= \beta J \sum_{\nu} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) \xi_j^{\mu_0} \xi_j^{\nu} R_{\nu R} \quad (49)$$

また、

$$x_j = \beta J \sqrt{\left(\sum_{\mu=1}^p \xi_j^{\mu} R'_{\mu R} \right)^2 + \left(\sum_{\mu=1}^p \xi_j^{\mu} R'_{\mu I} \right)^2} \quad (50)$$

よって、 $R'_{\mu R}$ も式 (42) の ξ を ξ' とした方程式を満たすことがわかる。また確率は、

$$P(\xi_j^{\mu}) = \frac{1}{2} \sum_{\xi_j^0} \left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2} \delta_{\xi_j^{\mu}, \xi_j^0} + \frac{1 - \sqrt{a}}{2} \delta_{\xi_j^{\mu}, -\xi_j^0} \right) \quad (51)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2} \delta_{\xi_j^{\mu}, 1} + \frac{1 - \sqrt{a}}{2} \delta_{\xi_j^{\mu}, -1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2} \delta_{\xi_j^{\mu}, -1} + \frac{1 - \sqrt{a}}{2} \delta_{\xi_j^{\mu}, 1} \right) \quad (52)$$

$$= \frac{1}{2} (\delta_{\xi_j^{\mu}, 1} + \delta_{\xi_j^{\mu}, -1}) \quad (53)$$

よって、

$$P(\xi_j^{\mu_0}) = \frac{1}{2} (\delta_{\xi_j^{\mu_0}, 1} + \delta_{\xi_j^{\mu_0}, -1}) \quad (54)$$

従って、

$$\langle \xi_j^{\mu_0} \rangle = \langle \xi_j^{\mu_0} \rangle = 0 \quad (55)$$

パターン間の相関は $\langle \xi_j^{\mu_0} \xi_j^{\nu} \rangle = a$ ($\mu_0 \neq \nu$) であるので、

$$\langle \xi_j^{\mu_0} \xi_j^{\nu} \rangle = -a \quad (\mu_0 \neq \nu) \quad (56)$$

よって、 ξ' による平均は ξ による平均と異なるので、 $a = 0$ のときは解となるが、 $a \neq 0$ のときは解とならないことが示せた。

Ξ_l の定義式 (41) を両辺 2 乗して、 l の和をとる。

$$\sum_{l=1}^{2^{p-1}} \Xi_l^2 = \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \left(R^2 + 2 \sum_{\mu < \nu} \eta_l^{\mu} \eta_l^{\nu} (R_{\mu R} R_{\nu R} + R_{\mu I} R_{\nu I}) \right) \quad (57)$$

ここで

$$\sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu = 2^{p-1} \delta_{\mu\nu} \quad (58)$$

が成り立つ。この式の証明は付録を参照。よって式 (57) は

$$\sum_{l=1}^{2^{p-1}} \Xi_l^2 = 2^{p-1} R^2 \quad (59)$$

$$R^2 = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \left(\frac{x_l}{\beta J} \right)^2 \quad (60)$$

一方、変形された鞍点方程式 (37)、(38) を用いて R_μ の定義式 (7) を書き換える。

$$R_\mu^2 = \beta J \sum_{\nu=1}^p c_{\mu\nu} (R_{\mu R} R_{\nu R} + R_{\mu I} R_{\nu I}) \quad (61)$$

これを R の定義式 (8) に代入して、式 (39) を用いると、

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_{\mu=1}^p \beta J \sum_{\nu=1}^p c_{\mu\nu} (R_{\mu R} R_{\nu R} + R_{\mu I} R_{\nu I}) \\ &= \frac{2}{\beta J} \sum_{l=1}^{2^{p-1}} P_l u_l x_l^2 \end{aligned} \quad (62)$$

2.7 鞍点方程式の解とその安定性の要約

この章では鞍点方程式の解とその安定性の一覧を示す。詳細は付録を参照。

2.7.1 $p = 2$ のとき

	η_l^1	η_l^2
$l = 1$	1	1
$l = 2$	1	-1
$l = 3$	-1	-1
$l = 4$	-1	1

表 1: $p = 2$ のときのサブラティスにおける ξ_l^μ の値

それぞれのサブラティスで $\{\xi_l^\mu\}$ が取る値を表 1 に示す。鞍点方程式を解析すると、以下のような 4 個の解が得られる。

記憶パターン

相関 $a = 0$ のときにのみ存在する。この解は以下で特徴付けられる。

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{\beta J}, \quad x_1 = x_2 \quad (63)$$

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta J} \delta_{\mu\nu} \quad (64)$$

$$R = R_1 = \frac{x_1}{\beta J} \quad (65)$$

$$T_c = \frac{J}{2} \quad (66)$$

この解は $T \leq T_c$ で存在し、安定である。

連続解

$$u_1 = \frac{1}{(1+a)\beta J}, \quad u_2 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (67)$$

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta J} \delta_{\mu\nu} \quad (68)$$

$$R^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2(\beta J)^2} \quad (69)$$

$$\text{臨界点は } T_c = \frac{(1-a)J}{2} \quad (70)$$

この解は $T < T_c$ で安定である。

対称混合解： S_1 ($R_{1R} = R_{2R}, R_{1I} = R_{2I} = 0$)

$$u_1 = \frac{1}{(1+a)\beta J}, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 0 \quad (71)$$

$$c_{\mu\mu} = \frac{1}{2\beta J} + \frac{1-a}{4}, \quad c_{\mu\nu} = \frac{1}{2\beta J} - \frac{1-a}{4} \quad (\mu \neq \nu) \quad (72)$$

$$R_1 = \frac{x_1}{2\beta J} = R_2, \quad R^2 = \frac{x_1^2}{2(\beta J)^2} \quad (73)$$

$$T < T_c = \frac{(1+a)J}{2} \text{ で存在。} \quad (74)$$

$$\text{安定条件は } \frac{(1-a)J}{2} < T < T_c = \frac{(1+a)J}{2} \quad (75)$$

対称混合解： S_2 ($R_{1R} = -R_{2R}, R_{1I} = R_{2I} = 0$)

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{(1-a)\beta J}, x_1 = 0 \quad (76)$$

$$c_{\mu\mu} = \frac{1}{2\beta J} + \frac{1+a}{4}, c_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\beta J} + \frac{1+a}{4} \quad (\mu \neq \nu) \quad (77)$$

$$R_1 = \frac{x_2}{2\beta J} = R_2, R^2 = \frac{x_2^2}{2(\beta J)^2} \quad (78)$$

$$\text{臨界点は } T_c = \frac{(1-a)J}{2} \quad (79)$$

この解は $T \leq T_c$ で存在するが、不安定である。

2.7.2 $p = 3$ のとき

	η_l^1	η_l^2	η_l^3
$l = 1$	1	1	1
$l = 2$	1	1	-1
$l = 3$	1	-1	-1
$l = 4$	1	-1	1
$l = 5$	-1	-1	-1
$l = 6$	-1	-1	1
$l = 7$	-1	1	1
$l = 8$	-1	1	-1

表 2: $p = 3$ のときのサブラティスにおける ξ_l^μ の値

それぞれのサブラティスで $\{\xi_l^\mu\}$ が取る値を表 2 に示す。鞍点方程式を解析すると、以下のような 6 個の解が得られる。

記憶パターン $a = 0$ のときにのみ存在する。

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{\beta J}, x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \quad (80)$$

$$c_{11} = \frac{1}{\beta J}, c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0 \quad (81)$$

$$R = R_1 = \frac{x_1}{\beta J} \quad (82)$$

$$T_c = \frac{J}{2} \quad (83)$$

この解は $T \leq T_c$ で存在し、安定である。

連続解 $a < \frac{1}{3}$ で存在する。

$$u_1 = \frac{1}{(1+3a)\beta J}, u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{(1-a)\beta J}, x_2 = x_3 = x_4 \quad (84)$$

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta J} \delta_{\mu\nu} \quad (85)$$

$$R_{2R} = R_{3R}, R^2 = \frac{x_1^2 + 3x_2^2}{4(\beta J)^2} \quad (86)$$

臨界点は、 $x_1 = 3x_2$ を満たすときの温度 T_c 。 $T < T_c$ で安定である。 $a = 0.1$ の場合、

$$T_c = 0.42 \quad (87)$$

非対称混合解： A_1

$$u_1 = \frac{1}{(1+3a)\beta J}, u_2 = u_3 = \frac{1}{(1-a)\beta J}, u_4 = \frac{1}{2}, x_4 = 0 \quad (88)$$

$$c_{\mu\mu} = \frac{3}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} \quad (89)$$

$$c_{12} = \frac{1}{4\beta J} - \frac{1-a}{8} = c_{23}, c_{13} = -\frac{1}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} = -c_{12} \quad (90)$$

$$R_{1R}^2 = \frac{1}{4}\Xi_2^2, R_{2R}^2 = \frac{\Xi_1^4}{16\Xi_2^2}, R_{3R}^2 = \frac{1}{16\Xi_2^2}(\Xi_1^2 - 2\Xi_2^2)^2 \quad (91)$$

$$R_{2I}^2 = \frac{\Xi_1^2}{16\Xi_2^2}(4\Xi_2^2 - \Xi_1^2) = R_{3I}^2 \quad (92)$$

$$R^2 = \frac{1}{4}(\Xi_1^2 + 2\Xi_2^2) \quad (93)$$

$$\text{臨界点は } T_c = \frac{(1-a)J}{2} \quad (94)$$

この解は $T < T_c$ で不安定である。

非対称混合解： A_2 は、 $c_{23} = c_{12}$ を $c_{23} = -c_{12}$ としたもの。これは A_1 で $l = 2 \rightarrow 3, l = 4 \rightarrow 2$ となり、 $\mu = 2, 3$ を入れ替えた解になる。

非対称混合解： A_3

$$u_1 = \frac{1}{(1+3a)\beta J}, u_2 = u_4 = \frac{1}{(1-a)\beta J}, u_3 = \frac{1}{2}, x_3 = 0 \quad (95)$$

$$c_{\mu\mu} = \frac{3}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} \quad (96)$$

$$c_{12} = \frac{1}{4\beta J} - \frac{1-a}{8} = c_{13}, c_{23} = -\frac{1}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} = -c_{12} \quad (97)$$

$$R_{1R}^2 = \frac{1}{4}\Xi_1^2, R_{2R}^2 = \frac{\Xi_1^2}{16} = R_{3R}^2, R_{2I}^2 = \frac{1}{16}(4\Xi_2^2 - \Xi_1^2) = R_{3I}^2 \quad (98)$$

$$R^2 = \frac{1}{4}(\Xi_1^2 + 2\Xi_2^2) \quad (99)$$

$$\text{臨界点は } T_c = \frac{(1-a)J}{2} \quad (100)$$

この解は $T < T_c$ で不安定である。

対称混合解： S_3 ($R_1 = R_2 = R_3$)

$$u_1 = \frac{1}{2}, x_1 = 0, u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (101)$$

$$c_{\mu\mu} = \frac{3}{4\beta J} + \frac{1-a}{8}, c_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} \quad (\mu \neq \nu) \quad (102)$$

$$R_{1R}^2 = \frac{1}{4}\Xi_2^2, R_{2R}^2 = \frac{\Xi_2^2}{16} = R_{3R}^2, R_{2I}^2 = \frac{3}{16}\Xi_2^2 = R_{3I}^2 \quad (103)$$

$$R^2 = \frac{3}{4}\Xi_2^2 \quad (104)$$

$$\text{臨界点は } T_c = \frac{(1-a)J}{2} \quad (105)$$

この解は $T < T_c$ で不安定である。

対称混合解： S_4 ($R_1 = R_2 = R_3$)

$R_{1R} = R_{2R} = R_{3R} > 0$ とした場合、

$$\frac{1}{\beta J} = \frac{3}{4}(1+3a)u(x_1) + \frac{1}{4}(1-a)u\left(\frac{x_1}{3}\right), x_2 = x_3 = x_4 = \frac{x_1}{3} \quad (106)$$

$$c_{\mu\mu} = \frac{3}{\beta J} - 2(1+3a)u_1, c_{\mu\nu} = -\frac{1}{\beta J} + (1+3a)u_1 \quad (\mu \neq \nu) \quad (107)$$

$$R_1 = \frac{x_1}{3\beta J} = R_2 = R_3, R = \frac{x_1}{\sqrt{3}\beta J} \quad (108)$$

$$\text{臨界点は } T_c = \frac{(1+2a)J}{2} \quad (109)$$

$a < \frac{1}{3}$ のとき、 \tilde{T} を連続解の臨界点とすると、 $\tilde{T} < T < T_c$ で安定。 $a > \frac{1}{3}$ のときは、 $T < T_c$ で安定。 R_{1R}, R_{2R}, R_{3R} の内1つ、及び2つを負とした場合は、存在しない。

2.8 連続解の特徴

連続解は、与えられたパラメータ (p, J, β, a) に対して、解の1パラメータファミリーとして定義する。連続解は $P_l u_l$ が一定であることと、 $c_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta J} \delta_{\mu\nu}$ で特徴づけられる。これらを証明する。

(1) $P_l u_l = \text{一定}$

式(60)と式(62)より、

$$\sum_{l=1}^{2^{p-1}} x_l^2 = 2^p \beta J \sum_{l=1}^{2^{p-1}} P_l u_l x_l^2 \quad (110)$$

各 l について

$$x_l(1 - 2^p \beta J P_l u_l) = 0 \quad (111)$$

であれば、式(110)が成り立つ。つまりこの式を満たす十分条件は以下の2式のいずれかである。

$$x_l = 0 \quad (112)$$

$$P_l u_l = \frac{1}{2^p \beta J} \quad (113)$$

もし全ての l について式(113)が成り立てば、 $P_l u_l$ は β, J, p のみで決まり、従って、 $x_1, \dots, x_{2^{p-1}}$ が β, J, p, a のみで決まる。このとき、 R_{1R}, \dots, R_{pI} のうち、自由に变化できる変数が1つあれば、連続解となる。

(2) $c_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta J} \delta_{\mu\nu}$

$c_{\mu\nu}$ は式(39)で定義されている。いま、全ての l について $P_l u_l = \text{一定}$ とすると、 $\sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu = 2^{p-1} \delta_{\mu\nu}$ であるので、

$$c_{\mu\nu} = P_l u_l \sum_{l=1}^{2^p} \eta_l^\mu \eta_l^\nu = P_l u_l 2^p \delta_{\mu\nu} \quad (114)$$

従って、 $P_l u_l = \frac{1}{2^p \beta J}$ であることから、

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta J} \delta_{\mu\nu} \quad (115)$$

となる。

2.9 $a = 0$ のときの連続解の存在

$p \geq 2$ の範囲で、連続解は任意の p で存在する。そのとき、 R_μ は 2 つだけ 0 ではない。例えば、 $R_{1R} \neq 0, R_{1I} = 0, R_2 \neq 0, R_3 = \dots = R_p = 0$ のような値をとる。このようにできるのは、パターン間に相関がないからである。解の存在条件は、関数 $u(x)$ の切片 $\frac{1}{2}$ よりも u_l が小さい範囲。よって臨界点 $T_c = \frac{J}{2}$ となる。相関がある場合は次の章で記すように、連続解の存在する p に制限が付く。

2.10 $a > 0$ のときの連続解の存在

$p = 2, 3$ のときの鞍点方程式の解析結果を踏まえると、条件式 Ξ_l の数と、変数 $R_{\mu R}, R_{\mu I}$ の数を比較することで、一般的に連続解の存在する p についての条件を得ることができる。 Ξ_l の条件式 (41) は 2^p 個だけある。しかし対称性から半分だけ考えればよいので、条件式は 2^{p-1} 個。次に変数の数は、 $(R_{\mu R}, R_{\mu I}), \mu = 1, \dots, p$ の $2 \times p$ 個あることがわかる。しかし回転対称性があることから $R_{1I} = 0$ とすることができる。また連続解が 1 パラメータファミリだとすると、例えば R_{1R} が与えられたとき、決めるべき従属的な変数の数は $2(p-1)$ 個。よって $2^{p-1} = 2(p-1)$ という関係式が p における連続解の存在条件であることがわかる。従って、 $p = 4$ 以降は変数の数より条件式の方が多くなってしまいうので、連続解は存在しない。以上のことから、 $p > 3$ に対して、連続解が存在しないことがわかる。

$p = 2$ の場合の解の存在条件は、式 (67) から、関数 $u(x)$ の切片 $\frac{1}{2}$ よりも u_2 が小さい範囲であるので、

$$\frac{1}{(1-a)\beta J} \leq \frac{1}{2} \quad (116)$$

従って臨界点は、

$$T_c = \frac{(1-a)J}{2} \quad (117)$$

となる。 $p = 3$ の場合、後で示すように連続解の存在条件に $x_1 < 3x_2$ が加わる。 $x_1 = 3x_2$ となったとき、連続解が対称混合解 S_4 と一致する (付録参照)。 $a = 0.1$ のとき、計算結果から $x_1 = 3x_2$ となる温度、すなわち臨界点 \tilde{T}_c を求めると 0.42 となる。

次に $p = 3$ の場合の、相関 a についての存在条件について述べる。 $T \sim 0$ のとき、式 (84) から $u_l \sim 0$ となるので、 $x_l \sim \infty$ になる。付録より、関数 $u(x)$ は

$$u(x) \simeq \frac{1}{x} \quad (118)$$

と近似できる。連続解のとき、式 (84) から $u_1 = \frac{1}{(1+3a)\beta J}, u_2 = \frac{1}{(1-a)\beta J}$ であるので、

$$x_1 \simeq \frac{(1+3a)J}{T} \quad (119)$$

$$x_2 \simeq \frac{(1-a)J}{T} \quad (120)$$

連続解の存在条件 $x_1 < 3x_2$ に代入して、

$$\frac{(1+3a)J}{T} < 3\frac{(1-a)J}{T} \quad (121)$$

$$a < \frac{1}{3} \quad (122)$$

以上より、記憶パターン間の相関 a についての連続解の存在条件 $a < \frac{1}{3}$ が得られた。相関 a と温度 T の空間における相図を図5に示す。 $T \sim 0$ のとき $a < \frac{1}{3}$ が、図5からも確認できる。

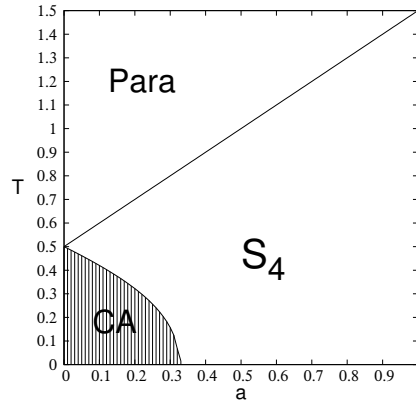


図 5: 連続解 (CA) と対称混合解 S_4 と *Para* 相の相図 ($p = 3$, 理論)
各解の安定領域を示す。縦軸: 温度 T 、横軸: 相関 a 。

2.11 連続解の安定性

この章では解の安定性を調べる。自由エネルギー F のヘシアンを計算する。

$$\frac{\partial F}{\partial R_{\mu R}} = JN(R_{\mu R} - \beta J \sum_{\omega=1}^p c_{\mu\omega} R_{\omega R}) \quad (123)$$

$$\frac{\partial F}{\partial R_{\mu I}} = JN(R_{\mu I} - \beta J \sum_{\omega=1}^p c_{\mu\omega} R_{\omega I}) \quad (124)$$

であるから、自由エネルギーの二階微分は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu R}} = JN \left(\frac{\partial R_{\mu R}}{\partial R_{\nu R}} - \beta J \sum_{\omega=1}^p \left(\frac{\partial c_{\mu\omega}}{\partial R_{\nu R}} R_{\omega R} + c_{\mu\omega} \frac{\partial R_{\omega R}}{\partial R_{\nu R}} \right) \right) \quad (125)$$

$$= JN \left(\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} - \beta J \sum_{\omega=1}^p \frac{\partial c_{\mu\omega}}{\partial R_{\nu R}} R_{\omega R} \right) \quad (126)$$

次に第三項の微分を計算する。ここで、

$$\zeta_{IR} \equiv \sum_{\omega=1}^p R_{\omega R} \eta_l^\omega, \quad \zeta_{II} \equiv \sum_{\omega=1}^p R_{\omega I} \eta_l^\omega \quad (127)$$

と定義すると、 $\Xi_l = \sqrt{(\zeta_{IR})^2 + (\zeta_{II})^2} = \frac{x_l}{\beta J}$ となる。従って、

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{\mu\omega}}{\partial R_{\nu R}} &= \sum_{l=1}^{2p} P_l u'(x_l) \frac{\partial x_l}{\partial R_{\nu R}} \eta_l^\mu \eta_l^\omega \\ &= (\beta J)^2 \sum_{l=1}^{2p} P_l \frac{u'(x_l)}{x_l} \zeta_{IR} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \eta_l^\omega \end{aligned} \quad (128)$$

元の式に代入して、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu R}} = JN \left(\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} - (\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2p} P_l \frac{u'(x_l)}{x_l} \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{IR})^2 \right) \quad (129)$$

同様に、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu I} \partial R_{\nu I}} = JN \left(\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} - (\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2p} P_l \frac{u'(x_l)}{x_l} \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{II})^2 \right) \quad (130)$$

F を $R_{\mu R}, R_{\nu I}$ で微分したものは、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu I}} = JN \left(-(\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2p} P_l \frac{u'(x_l)}{x_l} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \zeta_{IR} \zeta_{II} \right) \quad (131)$$

自由エネルギーの二階微分の式を更に変形する。 $X_l \equiv \frac{u'(x_l)}{x_l u(x_l)}$ と定義すると、ヘッセ行列 \mathcal{H} の成分は、

$$\mathcal{H}_{(\mu R, \nu R)} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu R}} = JN \left(\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} - (\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2p} P_l u_l X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{IR})^2 \right) \quad (132)$$

$$\mathcal{H}_{(\mu I, \nu I)} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu I} \partial R_{\nu I}} = JN \left(\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} - (\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2p} P_l u_l X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{II})^2 \right) \quad (133)$$

$$\mathcal{H}_{(\mu R, \nu I)} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu I}} = JN \left(-(\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2p} P_l u_l X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu \zeta_{IR} \zeta_{II} \right) \quad (134)$$

以上は一般的な表式である。

連続解のとき $P_l u_l = \frac{1}{2^p \beta J}$, $c_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta J} \delta_{\mu\nu}$ であるという条件から、連続解のときのヘッセ行列は、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu R}} = -JN(\beta J)^2 \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{l=1}^{2^{p-1}} X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{lR})^2 \quad (135)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu I} \partial R_{\nu I}} = -JN(\beta J)^2 \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{l=1}^{2^{p-1}} X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{lI})^2 \quad (136)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu I}} = -JN(\beta J)^2 \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{l=1}^{2^{p-1}} X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu \zeta_{lR} \zeta_{lI} \quad (137)$$

2.11.1 $a = 0$ の場合

パターン間の相関 $a = 0$ である場合の連続解の安定性を調べる。このとき確率 $P_l = \frac{1}{2^p}$ 。 $a = 0$ で連続解のときの条件をまとめると、 $l = 1, \dots, p$ について

$$P_l u_l = \frac{1}{2^p \beta J} \quad (138)$$

$$u_l = \frac{1}{\beta J} > 0 \quad (139)$$

$$x_l = \text{一定} > 0 \quad (140)$$

$$X_l = \frac{u'(x_l)}{x_l u(x_l)} < 0 \quad (141)$$

となる。全ての量は l に依存しない。便宜上、ヘッセ行列の代わりに、 $\Lambda = -\frac{1}{JN(\beta J)^2} \mathcal{H}$ と定義する。従って、

$$\Lambda_{\mu R \nu R} \equiv -\frac{1}{JN(\beta J)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu R}} = \frac{1}{2^{p-1}} X \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{lR})^2 \quad (142)$$

$$\Lambda_{\mu R \nu I} = \frac{1}{2^{p-1}} X \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \zeta_{lR} \zeta_{lI} \quad (143)$$

$$\Lambda_{\mu I \nu I} = \frac{1}{2^{p-1}} X \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{lI})^2 \quad (144)$$

ここで、 $a = 0$, $p \geq 2$ のとき、 $X \equiv X_l$ であり、 $R_{1R} \neq 0$, $R_{1I} = 0$, $R_2 \neq 0$, $R_3 = \dots = R_p = 0$ と一般性を失うことなく仮定できる。連続解は1パラメータファミリーであることから、 $R_{2I} = 0$ は対称混合解 S_1 なので、 $R_{2R} = 0$ と仮定すると

$$R_1 = |R_{1R}| \quad , \quad R_2 = |R_{2I}| \quad (145)$$

$$\zeta_{lR} = \sum_{\mu=1}^p R_{\mu R} \eta_l^\mu = R_{1R} \eta_l^1 \quad , \quad \zeta_{lI} = \sum_{\mu=1}^p R_{\mu I} \eta_l^\mu = R_{2I} \eta_l^2 \quad (146)$$

これらを式 (142) ~ (144) に代入する。次式が成立する。

$$\sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \eta_l^1 \eta_l^2 = \begin{cases} 2^{p-1} & (\mu, \nu) = (1, 2) \text{ 又は } (2, 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (147)$$

証明は付録を参照。まず、 $(\mu, \nu) = (1, 2)$ 又は $(2, 1)$ のときを考える。
 $\sum_{l=1}^{2^{p-1}} (\eta_l^1 \eta_l^2)^2 = 2^{p-1}$ なので、

$$\Lambda_{\mu R \nu I} = \frac{1}{2^{p-1}} X R_{1R} R_{2I} \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \eta_l^1 \eta_l^2 = X R_{1R} R_{2I} \quad (148)$$

$(\mu, \nu) \neq (1, 2)$, $(2, 1)$ のときは、

$$\Lambda_{\mu R \nu I} = \frac{1}{2^{p-1}} X R_{1R} R_{2I} \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \eta_l^1 \eta_l^2 = 0 \quad (149)$$

以上から行列の各成分は、

$$\Lambda_{\mu R \nu R} = \frac{1}{2^{p-1}} X R_1^2 \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu = X R_1^2 \delta_{\mu\nu} \quad (150)$$

$$\Lambda_{\mu R \nu I} = \frac{1}{2^{p-1}} X R_{1R} R_{2I} \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \eta_l^1 \eta_l^2 \quad (151)$$

$$= \begin{cases} X R_{1R} R_{2I} & (\mu, \nu) = (1, 2) \text{ 又は } (2, 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (152)$$

$$\Lambda_{\mu I \nu I} = X R_2^2 \delta_{\mu\nu} \quad (153)$$

行列要素の並べ方を $1R, 1I, 2R, 2I, \dots, pR, pI$ とする。

2.11.1.1 $p = 2$ のとき

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 1I & 2R & 2I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 1I \\ 2R \\ 2I \end{matrix} & \begin{pmatrix} \Lambda_{1R1R} & \Lambda_{1R1I} & \Lambda_{1R2R} & \Lambda_{1R2I} \\ \Lambda_{1I1R} & \Lambda_{1I1I} & \Lambda_{1I2R} & \Lambda_{1I2I} \\ \Lambda_{2R1R} & \Lambda_{2R1I} & \Lambda_{2R2R} & \Lambda_{2R2I} \\ \Lambda_{2I1R} & \Lambda_{2I1I} & \Lambda_{2I2R} & \Lambda_{2I2I} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (154)$$

$$= X \begin{pmatrix} R_1^2 & 0 & 0 & R_{1R} R_{2I} \\ 0 & R_2^2 & R_{1R} R_{2I} & 0 \\ 0 & R_{1R} R_{2I} & R_1^2 & 0 \\ R_{1R} R_{2I} & 0 & 0 & R_2^2 \end{pmatrix} \quad (155)$$

この行列の固有値を求める。

$$|\Lambda - \lambda E| = \begin{vmatrix} XR_1^2 - \lambda & 0 & 0 & XR_{1R}R_{2I} \\ 0 & XR_2^2 - \lambda & XR_{1R}R_{2I} & 0 \\ 0 & XR_{1R}R_{2I} & XR_1^2 - \lambda & 0 \\ XR_{1R}R_{2I} & 0 & 0 & XR_2^2 - \lambda \end{vmatrix} \quad (156)$$

$$= \{(XR_1^2 - \lambda)(XR_2^2 - \lambda) - (XR_{1R}R_{2I})^2\}^2 = 0 \quad (157)$$

従って固有値は、

$$\lambda_1 = 0 \quad (2 \text{ 個}) \quad , \quad \lambda_2 = XR^2 < 0 \quad (2 \text{ 個}) \quad (158)$$

よって $p = 2$ のとき、ヘシアン固有値は、 0 と $-JN(\beta J)^2 XR^2 > 0$ 。従って自由エネルギーの樋 (とい) の中にあり、連続解は安定である。2つの 0 固有値 $\lambda_1 = 0$ は連続解の1パラメータが変化するときの相空間における方向の中立安定性と、回転対称性の存在を意味している。

2.11.1.2 $p > 2$ のとき

$p = 2$ のときと同様に考えると、 $p > 2$ のときの行列は次のようになる。

$$\Lambda = X \begin{pmatrix} R_1^2 & 0 & 0 & R_{1R}R_{2I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2^2 & R_{1R}R_{2I} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{1R}R_{2I} & R_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{1R}R_{2I} & 0 & 0 & R_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2^2 \end{pmatrix} \quad (159)$$

この行列の固有値を求める。

$$|\Lambda - \lambda E| = (XR_2^2 - \lambda)^{p-2} (XR_1^2 - \lambda)^{p-2} \times \{(XR_1^2 - \lambda)(XR_2^2 - \lambda) - (XR_{1R}R_{2I})^2\}^2 = 0 \quad (160)$$

従ってヘシアン固有値は、 $\lambda_1 = 0$ (2個), $\lambda_2 = -JN(\beta J)^2 XR^2 > 0$ (2個) に加え、 $-JN(\beta J)^2 XR_1^2 > 0$ ($p - 2$ 個), $-JN(\beta J)^2 XR_2^2 > 0$ ($p - 2$ 個)。これらの固有値から、自由エネルギーの樋の中にあることが示せた。ところが R_1, R_2 によって固有値が変化するという事は、自由エネルギーの樋と垂直方向の安定性に強弱があることがわかる。

2.11.2 $a > 0$ の場合

パターン間に相関がある場合、 0 となるオーバーラップは存在しない。従って、 $R_{1R} \neq 0, R_{1I} = 0, R_l \neq 0 (l \geq 2)$ とおく。

2.11.2.1 $p = 2$ のとき

ζ_{1R}, ζ_{1I} の値は $\zeta_{1R} = \sum_{\mu=1}^p R_{\mu R} \eta_{\mu}^{\mu}$, $\zeta_{1I} = \sum_{\mu=1}^p R_{\mu I} \eta_{\mu}^{\mu}$ 、又 $R_{1I} = 0$ であるので、

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + R_{2R} \quad (161)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} - R_{2R} \quad (162)$$

$$\zeta_{1I} = R_{1I} + R_{2I} = R_{2I} \quad (163)$$

$$\zeta_{2I} = R_{1I} - R_{2I} = -R_{2I} \quad (164)$$

以上よりヘッセ行列 \mathcal{H} が、式 (135) ~ (137) よりわかる。

$$\Lambda = -\frac{2}{JN(\beta J)^2} \mathcal{H} \quad (165)$$

により Λ を再定義する。 $P_l u_l = \frac{1}{2^p \beta J}$ を用いて、

$$\Lambda_{1R1R} = X_1(\zeta_{1R})^2 + X_2(\zeta_{2R})^2 = \Lambda_{2R2R} \equiv A \quad (166)$$

$$\Lambda_{1R2R} = X_1(\zeta_{1R})^2 - X_2(\zeta_{2R})^2 = \Lambda_{2R1R} \equiv B \quad (167)$$

$$\Lambda_{1I1I} = X_1(\zeta_{1I})^2 + X_2(\zeta_{2I})^2 = \Lambda_{2I2I} \equiv C \quad (168)$$

$$\Lambda_{1I2I} = X_1(\zeta_{1I})^2 - X_2(\zeta_{2I})^2 = \Lambda_{2I1I} \equiv D \quad (169)$$

$$\Lambda_{1R1I} = X_1 \zeta_{1R} \zeta_{1I} + X_2 \zeta_{2R} \zeta_{2I} = \Lambda_{2R2I} \equiv G \quad (170)$$

$$\Lambda_{1R2I} = X_1 \zeta_{1R} \zeta_{1I} - X_2 \zeta_{2R} \zeta_{2I} = \Lambda_{2R1I} \equiv K \quad (171)$$

行列要素の並べ方を $1R, 1I, 2R, 2I$ として当てはめると、

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 1I & 2R & 2I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 1I \\ 2R \\ 2I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & G & B & K \\ G & C & K & D \\ B & K & A & G \\ K & D & G & C \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (172)$$

回転対称性から R_{1I} の行と列を除いてよい。それを改めて Λ とおき、この行列の固有値を求める。

$$|\Lambda - \lambda E| = \begin{vmatrix} A - \lambda & B & K \\ B & A - \lambda & G \\ K & G & C - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \lambda^3 - (2A + C)\lambda^2 + (2AC + A^2 - B^2 - G^2 - K^2)\lambda \\ - (A^2C + 2BGK - AK^2 - B^2C - A^2G) = 0 \end{aligned} \quad (174)$$

となる。この三次方程式を解くことで、ヘッセ行列の固有値がわかる。0次の項を計算すると0になるので、 $\lambda = 0$ という解がひとつわかり、式は二次方程式になる。

$$\lambda^2 - (2A + C)\lambda + 2AC + A^2 - B^2 - G^2 - K^2 = 0 \quad (175)$$

ここで $g \equiv -(2A + C)$, $h \equiv 2AC + A^2 - B^2 - G^2 - K^2$ とおくと、 $\lambda^2 + g\lambda + h = 0$ 。解の公式より、

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-g \pm \sqrt{g^2 - 4h}) \quad (176)$$

$$g^2 = \left(X_1 \{2(\zeta_{1R})^2 + (\zeta_{1I})^2\} + X_2 \{2(\zeta_{2R})^2 + (\zeta_{2I})^2\} \right)^2 \quad (177)$$

$$h = 2X_1X_2 \left((\zeta_{1R})^2(\zeta_{2I})^2 + (\zeta_{1I})^2(\zeta_{2R})^2 + 2(\zeta_{1R})^2(\zeta_{2R})^2 \right) \quad (178)$$

$A < 0$, $C < 0$ なので $g > 0$ 。また $X_l < 0$ なので $h > 0$ 。 $g^2 - 4h$ が正であることを示す。

$$\begin{aligned} g^2 - 4h &= X_1^2 \{2(\zeta_{1R})^2 + (\zeta_{1I})^2\}^2 + X_2^2 \{2(\zeta_{2R})^2 + (\zeta_{2I})^2\}^2 \\ &\quad + 2X_1X_2 \{(\zeta_{1I})^2(\zeta_{2I})^2 - 2(\zeta_{1R})^2(\zeta_{2I})^2 - 2(\zeta_{1I})^2(\zeta_{2R})^2 - 4(\zeta_{1R})^2(\zeta_{2R})^2\} \end{aligned} \quad (179)$$

ここで、

$$z_1 = \{2(\zeta_{1R})^2 + (\zeta_{1I})^2\}^2 \quad (180)$$

$$z_2 = (\zeta_{1I})^2(\zeta_{2I})^2 - 2(\zeta_{1R})^2(\zeta_{2I})^2 - 2(\zeta_{1I})^2(\zeta_{2R})^2 - 4(\zeta_{1R})^2(\zeta_{2R})^2 \quad (181)$$

$$z_3 = \{2(\zeta_{2R})^2 + (\zeta_{2I})^2\}^2 \quad (182)$$

とおくと、 $g^2 - 4h = z_1X_1^2 + 2z_2X_2X_1 + z_3X_2^2$ のように、 X_1 の二次式で表せる。 $z_1 > 0$ なので、 X_1 の式の判別式 d が負であれば、 $g^2 - 4h > 0$ が言える。

$$d = (z_2X_2)^2 - z_1z_3X_2^2 = X_2^2(z_2^2 - z_1z_3) \quad (183)$$

更に $\tilde{z}_1 = 2(\zeta_{1R})^2 + (\zeta_{1I})^2$, $\tilde{z}_3 = 2(\zeta_{2R})^2 + (\zeta_{2I})^2$ とおくと、

$$z_2^2 - z_1z_3 = (z_2 + \tilde{z}_1\tilde{z}_3)(z_2 - \tilde{z}_1\tilde{z}_3) \quad (184)$$

括弧の中をそれぞれ計算する。

$$z_2 + \tilde{z}_1\tilde{z}_3 = 2(\zeta_{1I})^2(\zeta_{2I})^2 > 0 \quad (185)$$

$$z_2 - \tilde{z}_1\tilde{z}_3 = -4(\zeta_{1R})^2(\zeta_{2I})^2 - 4(\zeta_{1I})^2(\zeta_{2R})^2 - 8(\zeta_{1R})^2(\zeta_{2R})^2 < 0 \quad (186)$$

よって判別式は負であることがわかり、 $g^2 - 4h > 0$ となる。従って2つの固有値 λ_{\pm} は負。以上より連続解のときのヘッセ行列 \mathcal{H} の固有値は、0が2つ、正が2つ。自由エネルギーの極値の中にあり、安定となる。

2.11.2.2 $p = 3$ のとき

連続解が存在する R_{1R} の範囲の計算から、 $R_{1R} = R_{2R} = R_{3R}$ で評価してもよいことがわかる (付録参照)。付録より、

$$a' = \frac{\Xi_1^2 - \Xi_2^2}{8} \quad (187)$$

$R_{1R} = R_{2R} = R_{3R}$ 、 $R_{1R}^2 = a'$ より、

$$R_{1R}^2 = \frac{\Xi_1^2 - \Xi_2^2}{8} = R_{2R}^2 = R_{3R}^2 \quad (188)$$

$$\begin{aligned} R_{2I}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ -(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2) + \sqrt{(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2)^2 - 4(a' - R_{2R}^2)^2} \right\} \\ &= -(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2) = R^2 - 3a' = \frac{9\Xi_2^2 - \Xi_1^2}{8} \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} R_{3I}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ -(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2) - \sqrt{(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2)^2 - 4(a' - R_{2R}^2)^2} \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (190)$$

ここで、 $R_{2I}^2 > 0$ より、

$$\Xi_1 < 3\Xi_2 \quad (191)$$

であることがわかる。また ζ_{1R}, ζ_{1I} の値は、 $R_{1I} = 0$ であるので、

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + R_{2R} + R_{3R} = 3R_{1R} \quad (192)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} + R_{2R} - R_{3R} = R_{1R} \quad (193)$$

$$\zeta_{3R} = R_{1R} - R_{2R} - R_{3R} = -R_{1R} \quad (194)$$

$$\zeta_{4R} = R_{1R} - R_{2R} + R_{3R} = R_{1R} \quad (195)$$

$$\zeta_{1I} = R_{1I} + R_{2I} + R_{3I} = R_{2I} \quad (196)$$

$$\zeta_{2I} = R_{1I} + R_{2I} - R_{3I} = R_{2I} \quad (197)$$

$$\zeta_{3I} = R_{1I} - R_{2I} - R_{3I} = -R_{2I} \quad (198)$$

$$\zeta_{4I} = R_{1I} - R_{2I} + R_{3I} = -R_{2I} \quad (199)$$

また、連続解のとき $u_2 = u_3 = u_4$ より $X_2 = X_3 = X_4$ 。以上よりヘッセ行列 \mathcal{H} が、式 (135) ~ (137) よりわかる。

$$\Lambda = -\frac{4}{JN(\beta J)^2} \mathcal{H} \quad (200)$$

と再定義する。

$$\Lambda_{1R1R} = 3(3X_1 + X_2)R_{1R}^2 = \Lambda_{2R2R} = \Lambda_{3R3R} \equiv A \quad (201)$$

$$\Lambda_{1R2R} = (9X_1 - X_2)R_{1R}^2 = \Lambda_{2R1R} \equiv B \quad (202)$$

$$\Lambda_{1R3R} = \Lambda_{3R1R} \equiv B \quad (203)$$

$$\Lambda_{2R3R} = \Lambda_{3R2R} \equiv B \quad (204)$$

$$\Lambda_{1I1I} = (X_1 + 3X_2)R_{2I}^2 = \Lambda_{2I2I} = \Lambda_{3I3I} \equiv C \quad (205)$$

$$\Lambda_{1I2I} = (X_1 - X_2)R_{2I}^2 = \Lambda_{2I1I} \equiv D \quad (206)$$

$$\Lambda_{1I3I} = \Lambda_{3I1I} \equiv D \quad (207)$$

$$\Lambda_{2I3I} = \Lambda_{3I2I} \equiv D \quad (208)$$

$$\Lambda_{1R1I} = (3X_1 + X_2)R_{1R}R_{2I} = \Lambda_{2R2I} = \Lambda_{3R3I} \equiv E \quad (209)$$

$$\Lambda_{1R2I} = \Lambda_{2R1I} \equiv E \quad (210)$$

$$\Lambda_{1R3I} = 3(X_1 - X_2)R_{1R}R_{2I} = \Lambda_{3R1I} \equiv G \quad (211)$$

$$\Lambda_{2R3I} = \Lambda_{3R2I} \equiv E \quad (212)$$

各成分をまとめると、

$$A \equiv 3(3X_1 + X_2)R_{1R}^2 \quad (213)$$

$$B \equiv (9X_1 - X_2)R_{1R}^2 = \frac{9X_1 - X_2}{3(3X_1 + X_2)}A = \gamma A \quad (214)$$

$$C \equiv (X_1 + 3X_2)R_{2I}^2 \quad (215)$$

$$D \equiv (X_1 - X_2)R_{2I}^2 = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + 3X_2}C = \omega C \quad (216)$$

$$E \equiv (3X_1 + X_2)R_{1R}R_{2I} \quad (217)$$

$$G \equiv 3(X_1 - X_2)R_{1R}R_{2I} = \frac{3(X_1 - X_2)}{3X_1 + X_2}E = \epsilon E \quad (218)$$

ここで、

$$\gamma = \frac{9X_1 - X_2}{3(3X_1 + X_2)} \quad (219)$$

$$\omega = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + 3X_2} \quad (220)$$

$$\epsilon = \frac{3(X_1 - X_2)}{3X_1 + X_2} \quad (221)$$

回転対称性から R_{1I} の行と列を除いて、それを Λ とおく。すると行列は、

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 2R & 3R & 2I & 3I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 3R \\ 2I \\ 3I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & \gamma A & \gamma A & E & \epsilon E \\ \gamma A & A & \gamma A & E & E \\ \gamma A & \gamma A & A & E & E \\ E & E & E & C & \omega C \\ \epsilon E & E & E & \omega C & C \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (222)$$

この行列の固有値を求める。

$$|\Lambda - \lambda I| = \begin{vmatrix} A - \lambda & \gamma A & \gamma A & E & \epsilon E \\ \gamma A & A - \lambda & \gamma A & E & E \\ \gamma A & \gamma A & A - \lambda & E & E \\ E & E & E & C - \lambda & \omega C \\ \epsilon E & E & E & \omega C & C - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -2^{-4} \{-A(1 - \gamma) + \lambda\} \times \begin{vmatrix} 0 & 2\{A(1 + 2\gamma) - \lambda\} & E(1 - \epsilon) & E(5 + \epsilon) \\ -2\{A(1 - \gamma) - \lambda\} & 2\{A(1 + \gamma) - \lambda\} & 0 & 4E \\ 2E(\epsilon - 1) & 4E & 0 & 2\{C(1 + \omega) - \lambda\} \\ 2E(\epsilon - 1) & 0 & 2\{-C(1 - \omega) + \lambda\} & 0 \end{vmatrix} \quad (223)$$

$r = \frac{X_2}{X_1}$ とおく。また、 C を A, E で書き表すと

$$C = \frac{3(X_1 + 3X_2)E^2}{(3X_1 + X_2)A} \quad (224)$$

すると $|\Lambda - \lambda I|$ は、

$$-2^{-4} \{-A(1 - \gamma) + \lambda\} \times \begin{vmatrix} 0 & 2\left(\frac{27+r}{3(3+r)}A - \lambda\right) & \frac{4r}{3+r}E & \frac{2(9+r)}{3+r}E \\ -2\left(\frac{4r}{3(3+r)}A - \lambda\right) & 2\left(\frac{2(9+r)}{3(3+r)}A - \lambda\right) & 0 & 4E \\ \frac{2-4r}{3+r}E & 4E & 0 & 2\left(\frac{6(1+r)E^2}{(3+r)A} - \lambda\right) \\ \frac{2-4r}{3+r}E & 0 & -2\left(\frac{12rE^2}{(3+r)A} - \lambda\right) & 0 \end{vmatrix} \quad (225)$$

1行 $\times \frac{E}{A}$, 2行 $\times \frac{E}{A}$, 3列 $\times \frac{A}{E}$, 4列 $\times \frac{A}{E}$ 。そして各列を E で割る。1列 $\div \frac{-8r}{3(3+r)}$, 2列 $\div \frac{2}{3(3+r)}$, 3列 $\div \frac{4r}{3+r}$, 4列 $\div \frac{2}{3+r}$ 。 $v = \frac{3(3+r)}{4rA}$, $z = \frac{(3+r)A}{2rE^2}$ とおくと、

$$-2^{-4}\{-A(1-\gamma) + \lambda\} \times \frac{-128r^2}{9(3+r)^4} E^4 \times \begin{vmatrix} 0 & (27+r) - 4rv\lambda & 1 & 9+r \\ 1-v\lambda & 2(9+r) - 4rv\lambda & 0 & 2(3+r) \\ 3 & 6(3+r) & 0 & 6(1+r) - 2rz\lambda \\ 3 & 0 & -6+z\lambda & 0 \end{vmatrix} \quad (226)$$

行列の係数より、一つ目の固有値は

$$\lambda_1 = A(1-\gamma) = 4X_2R_{1R}^2 < 0 \quad (227)$$

続いて、行列を余因子展開する。

$$\begin{vmatrix} 1-v\lambda & 2(9+r) - 4rv\lambda & 2(3+r) \\ 3 & 6(3+r) & 6(1+r) - 2rz\lambda \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} - (-6+z\lambda) \begin{vmatrix} 0 & (27+r) - 4rv\lambda & 9+r \\ 1-v\lambda & 2(9+r) - 4rv\lambda & 2(3+r) \\ 3 & 6(3+r) & 6(1+r) - 2rz\lambda \end{vmatrix} \quad (228)$$

$\lambda = 0$ とすると行列式が 0 となることが示せるので、固有値 $\lambda = 0$ が存在する。この行列を展開し、 2λ で割ると、以下の 3 次方程式が得られる。

$$4r^2v^2z^2\lambda^3 - rvz(12v + 5rz + 27z + 36rv)\lambda^2 + (27rz^2 + 240rvz + r^2z^2 + 72r^2v^2 + 72rv^2 + 24r^2vz)\lambda - 432rv - 120rz = 0 \quad (229)$$

各係数を計算する。 v, z は書き換えると、

$$v = \frac{3(3+r)}{4rA} = \frac{2}{(\Xi_1^2 - \Xi_2^2)X_2} \quad (230)$$

$$z = \frac{(3+r)A}{2rE^2} = \frac{12}{(9\Xi_2^2 - \Xi_1^2)X_2} \quad (231)$$

各係数を $4r^2v^2z^2$ で割る。すると三次方程式は、

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (232)$$

$$a_2 = -\frac{1}{8} \left\{ (\Xi_1^2 - \Xi_2^2)(27X_1 + 5X_2) + 2(9\Xi_2^2 - \Xi_1^2)(X_1 + 3X_2) \right\} \quad (233)$$

$$a_1 = \frac{1}{16} \left\{ X_2(\Xi_1^2 - \Xi_2^2)^2(27X_1 + X_2) + 2X_2(9\Xi_2^2 - \Xi_1^2)^2(X_1 + X_2) \right. \\ \left. + 4X_2(\Xi_1^2 - \Xi_2^2)(9\Xi_2^2 - \Xi_1^2)(10X_1 + X_2) \right\} \quad (234)$$

$$a_0 = -\frac{1}{4} X_1 X_2^2 (\Xi_1^2 - \Xi_2^2)(9\Xi_2^2 - \Xi_1^2)(11\Xi_2^2 + \Xi_1^2) \quad (235)$$

実対称行列の固有値は実数であることから、 $f(\lambda) = 0$ の解は実数でなければならぬ。つまり $f(\lambda) = 0$ は3つの実数解を持つ。従って $f'(\lambda) = 0$ は2つの実数解をもつ。ここから関数 $f(\lambda)$ が3つの負の実数解を持つことを示す。いま $X_l < 0$ で、 Ξ_l の大小関係は $\Xi_1 > \Xi_2$, $\Xi_1 < 3\Xi_2$ なので、係数 $a_0, a_1, a_2 > 0$ であることが言える。 $f'(\lambda) = 0$ の2つの実数解を ξ, η ($\xi < \eta$) とおく。 $f(\lambda)$ が3つの負の実数解を持つための条件は以下の2つ。

1. $f(0) > 0$
2. $\eta < 0$

これらの条件を調べる。

1.

$f(0) = a_0$ 、また $a_0 > 0$ なので $f(0) > 0$ が成り立つ。

2.

$f(\lambda)$ の一階微分は、

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1 = 0 \quad (236)$$

この式は2つの実数解をもつので、 $a_2^2 - 3a_1 > 0$ 。よって上の式の解 η, ξ は、

$$\xi = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 3a_1}}{3} \quad (237)$$

$$\eta = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_1}}{3} \quad (238)$$

$a_1 > 0$ 、 $a_2 > 0$ より、 $\eta < 0$ となる。

以上より、 Λ が1つの0固有値、3つの負の固有値を持つことが証明できた。従って連続解のときのヘッセ行列 \mathcal{H} の固有値は、0が2つ、正が4つ。自由エネルギーの極の中にあり、安定である。

3 数値計算

3.1 数値計算の方法

数値シミュレーションでは、ランダムに選んだ k 番目の位相 ϕ_k をずらし、メトロポリス法で数値計算をした。理論値のプログラムは、シンプソンの公式で n 次の変形ベッセル関数を求め、方程式 $u(x) = \frac{1}{\beta J}$ 等を多次元ニュートン法で求めている。相互作用の強さは全て $J = 1$ としている。

3.2 温度依存性

図 6、図 7 は $a = 0, p = 2, 3, J = 1$ のときの温度依存性のグラフである。 $N = 10000$ 。10000mcs 行い、前半の 5000mcs は捨てている。後半のデータから R の平均を計算したものを描く。実線は理論値 R 、記号はエラーバーを付けたシミュレーション結果を表す。サンプル数 50。標準偏差が非常に小さいため、エラーバーも小さくなっている。

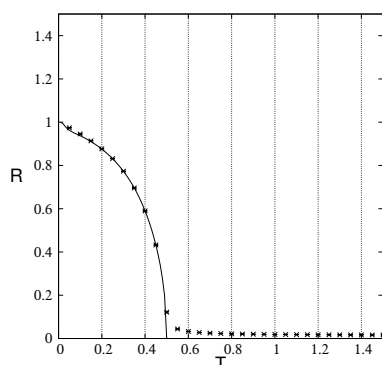


図 6: $a = 0, p = 2$ での温度依存性

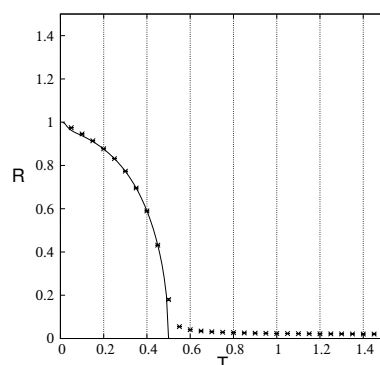


図 7: $a = 0, p = 3$ での温度依存性

図 8、図 9 は $a = 0.1, p = 2, 3, J = 1$ のときの温度依存性のグラフである。連続解が消滅すると、以降は対称混合解となる。実線は連続解の理論値 R 、破線は対称混合解 S_4 の理論値 R 、記号はエラーバーを付けたシミュレーション結果を表す。

3.3 R_μ の時間変化

連続解の特徴の 1 つである、任意の 2 つのパターンが 0 より大きいことを基準に安定性を判断する。図 10 ~ 23 は R_μ の時系列のグラフである。 $T = 0.1, N = 8000$ 。

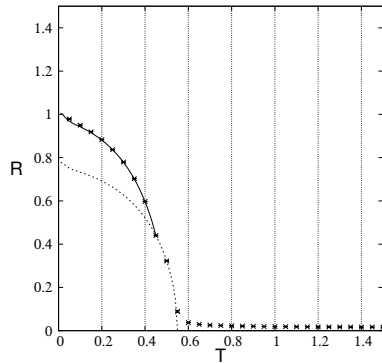


図 8: $a = 0.1, p = 2$ での温度依存性

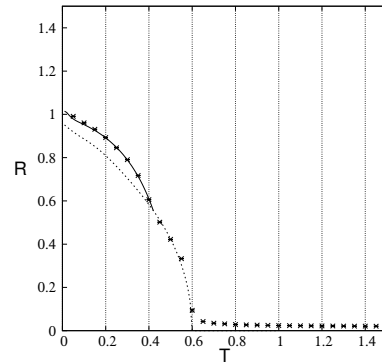


図 9: $a = 0.1, p = 3$ での温度依存性

20000mcs を 100mcs おきに描く。

3.3.1 $a = 0$ の場合

最大値を取る R_μ と、2 番目に大きな値を取る R_μ の差 ΔR_μ の標準偏差を 10000 ~ 20000mcs の範囲で計算したものを表 3 に載せる。10 個のサンプルの中で、一番大きな標準偏差を使用する。データの前半は過渡状態である可能性が高く、始めは連続解のように振る舞っていても最終的に対称混合解に収束する可能性があるためである。サンプルを 10 個用意した中で、一つでも連続解となっているものがあれば、その時の p において連続解があるとみなすとする。また初期値 ϕ をランダムではなく、わかっている解からスタートさせる。その理由は、解を見つけるまでの時間を短縮するためである。今回は記憶パターン解と連続解、2つの状態からスタートさせた。

これらのグラフと標準偏差の値を用いて、連続解が不安定となるパターン数 p を求める。数値シミュレーションの結果から経験的に、標準偏差の値がおおよそ 0.1 を越えていれば連続解であると考えられる。表 3 の内、標準偏差が 0.1 を越えるもの、0.1 付近で相転移が起こっていきそうなパターン数 p のグラフをいくつか見てみる。

パターン数 p	標準偏差 (記憶パターンスタート)	標準偏差 (連続解スタート)
2	0.106454	0.108201
3	0.096639	0.155384
4	0.122291	0.093065
5	0.139448	0.184802
6	0.105445	0.072757
7	0.117235	0.132253
8	0.096639	0.123684
9	0.079033	0.130327
10	0.076059	0.073893
11	0.076511	0.077032
12	0.074804	0.072779
13	0.309175	0.210820
14	0.130990	0.072007
15	0.075007	0.075885
16	0.217516	0.107828
17	0.127506	0.073866
18	0.256366	0.094557
19	0.169498	0.293290
20	0.079238	0.149556
21	0.192131	0.074628
22	0.072629	0.076066
23	0.073973	0.098336
24	0.075501	0.076057
25	0.074074	0.090347
26	0.071618	0.072057
27	0.074443	0.075047
28	0.073827	0.073839
29	0.071581	0.074002
30	0.151567	0.072369
31	0.072208	0.117061
32	0.074146	0.071854
33	0.074627	0.071725
34	0.156919	0.072857
35	0.075675	0.074908
36	0.230746	0.249223
37	0.074157	0.073513

表 3: ΔR_μ の標準偏差

記憶パターンスタート

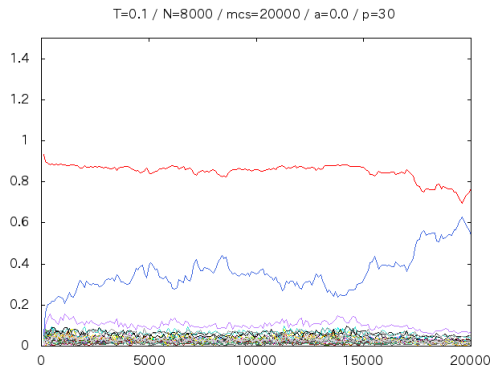


図 10: $p = 30$

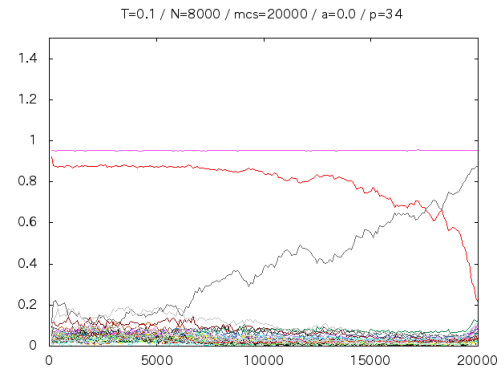


図 11: $p = 34$

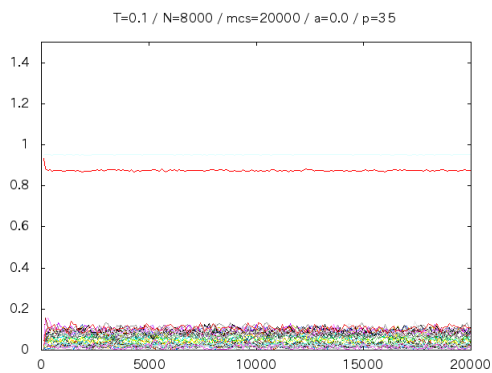


図 12: $p = 35$

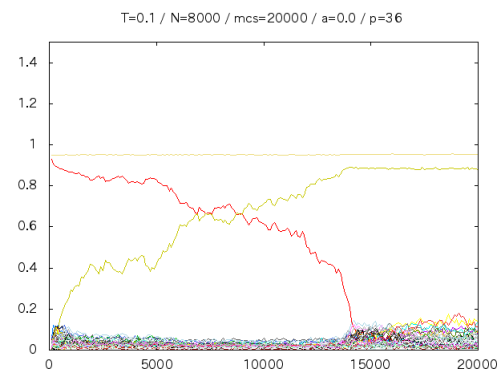


図 13: $p = 36$

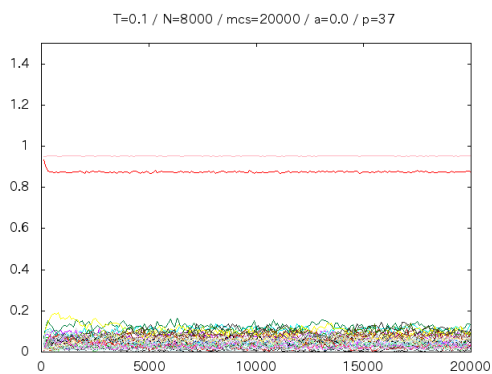


図 14: $p = 37$

以上、図 10~14 と表 3 から、 $p = 36$ までは連続解が存在し、それ以降は存在しないと思われる。

連続解スタート

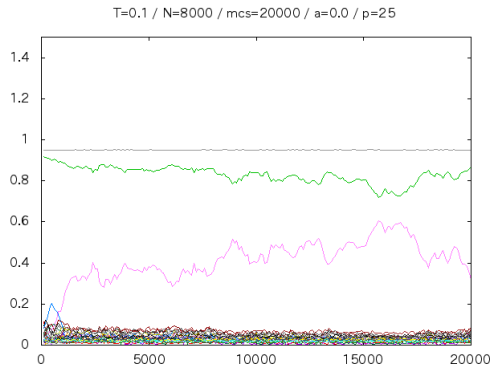


図 15: $p = 25$

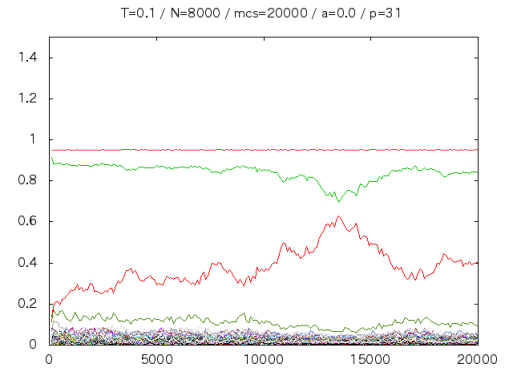


図 16: $p = 31$

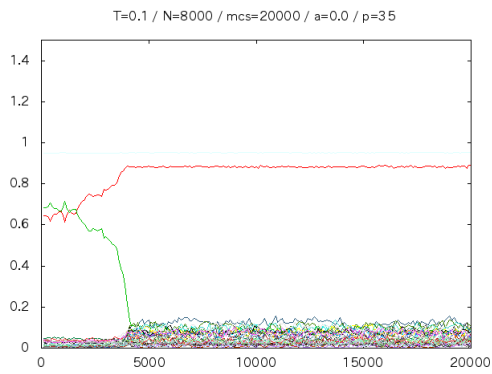


図 17: $p = 35$

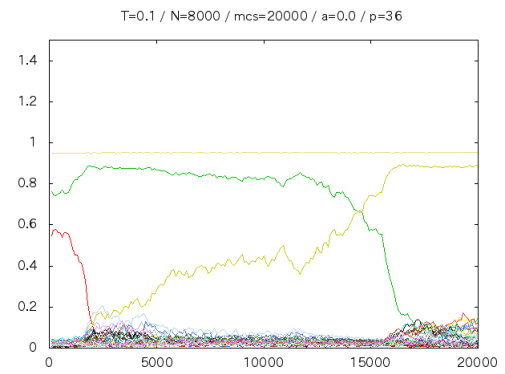


図 18: $p = 36$

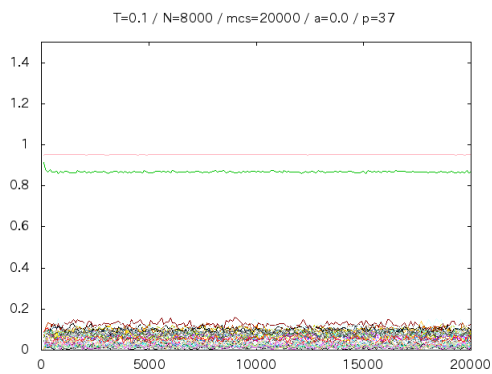


図 19: $p = 37$

以上、図 15 ~ 19 と表 3 から、 $p = 36$ までは連続解が存在し、それ以降は存在し

ないと思われる。

今回のシミュレーションでは、どちらの状態からスタートしても、 $p = 36$ まで安定であるという結果が得られたが、ランダムウォークの動きによる揺らぎの影響があるので、乱数の初期値を変えれば必ずしも同じ結果にはならないと考えられる。

統計力学的解析では、 N が無限であるときであった。ここで、 N が有限である場合を考える。取り得る全ての状態の数から、

$$N \simeq 2^p \quad (239)$$

として、 p の値を設定する。つまり理論計算の際の仮定である、自己平均性が破れる p である。

$$p = \frac{1}{\ln 2} \ln N \quad (240)$$

$N = 8000$ の場合

$$\ln N = 8.9871 \dots \quad (241)$$

$$p = \frac{\ln N}{\ln 2} = 12.965 \dots \simeq 13 \quad (242)$$

$N = 10000$ の場合

$$\ln N = 9.2103 \dots \quad (243)$$

$$p = \frac{\ln N}{\ln 2} = 13.287 \dots \simeq 13 \quad (244)$$

従って、連続解が存在する目安として $p \sim 13$ が得られる。理論計算では $p = 13$ 付近で自己平均性が破れ、理論が破綻すると予想されるが、それを上回るパターン数まで連続解が存在した。オーダーとしては正しい結果である。

3.3.2 $a > 0$ の場合

$a = 0.1$ として数値シミュレーションを行う。初期値 ϕ はランダムに与えられている。

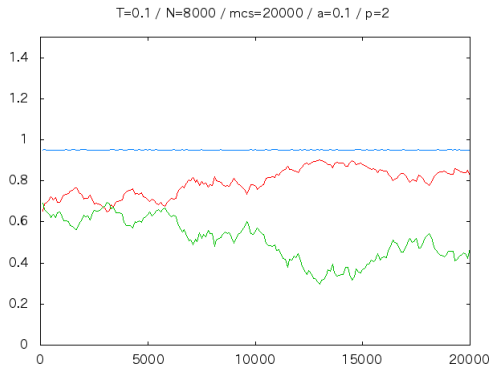


図 20: $p = 2$

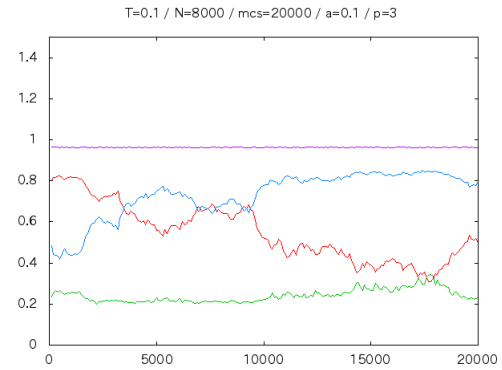


図 21: $p = 3$

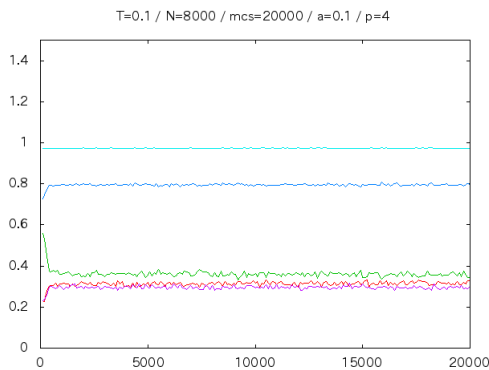


図 22: $p = 4$

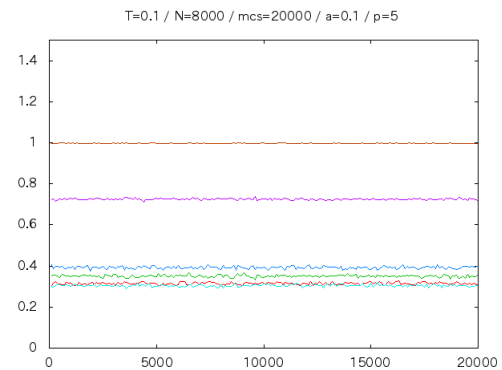


図 23: $p = 5$

以上、図 20~23 から、 $p = 3$ まで連続解が存在し、 $p \geq 4$ では不安定となることがわかった。この結果は理論的に求めた安定性と一致している。

3.4 各解の R_μ 空間における位置関係

理論解析で求めたそれぞれの解が、 R_μ 空間において、温度が上がるにつれてどのような振る舞いをするのかを解析する。図 24~30 は R_μ を軸にとったグラフである。 $a = 0.1$ とする。 $N = 4000$ 。100000mcs を 100mcs おきに描く。

$T = 0.1, 0.2, \dots$ と大きくしていくと、非対称混合解は $T > 0.36$ で存在しなくなる。 $T = 0.36$ というのは、 $a = 0.1$ としたとき、 $x_1 = 2x_2$ となる温度である。

更に温度を上げていくと、連続解と対称混合解が $T = 0.42$ で一致する。 $T = 0.42$ というのは、 $a = 0.1$ としたとき、 $x_1 = 3x_2$ となる温度である。

(i) $T = 0.1$ のとき

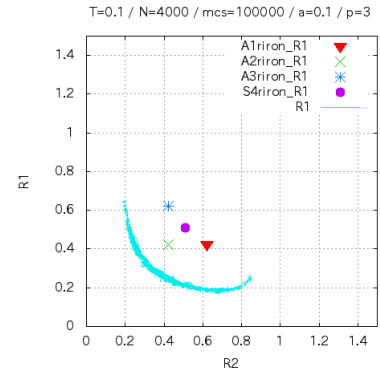
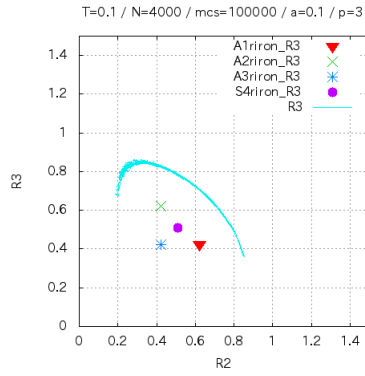


図 24: 縦軸: R_3 、横軸: R_2 。
2次元で見る各解の位置関係。 $T = 0.1$ 。水色:シミュレーション、紫: S_4 、赤: A_1 、緑: A_2 、青: A_3 。

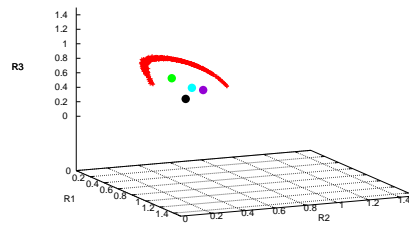


図 26: 3次元で見る各解の位置関係
x 軸: R_2 、y 軸: R_1 、z 軸: R_3 。 $T = 0.1$ 。赤:シミュレーション、水色: S_4 、紫: A_1 、
緑: A_2 、黒: A_3 。

(ii) $T = 0.2$ のとき

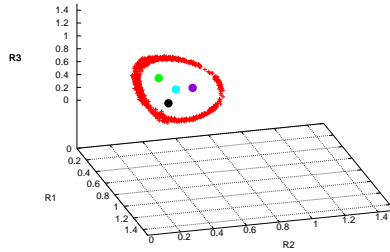


図 27: 3次元で見る各解の位置関係
x 軸: R_2 、y 軸: R_1 、z 軸: R_3 。 $T = 0.2$ 。赤: シミュレーション、水色: S_4 、紫: A_1 、
緑: A_2 、黒: A_3 。

(iii) $T = 0.3$ のとき

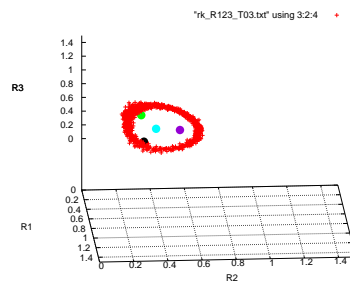


図 28: 3次元で見る各解の位置関係
x 軸: R_2 、y 軸: R_1 、z 軸: R_3 。 $T = 0.3$ 。赤: シミュレーション、水色: S_4 、紫: A_1 、
緑: A_2 、黒: A_3 。

(iv) $T = 0.36$ のとき

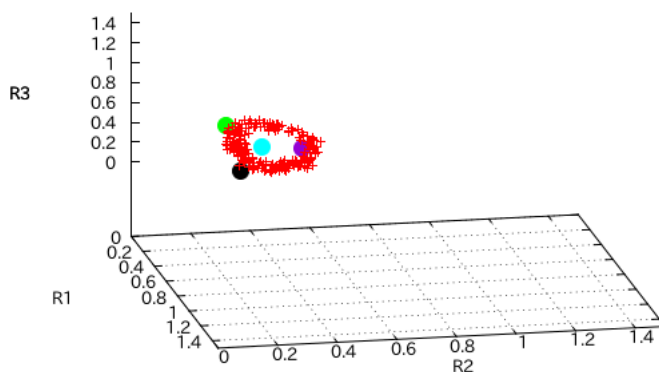


図 29: 3次元で見る各解の位置関係
x 軸: R_2 、y 軸: R_1 、z 軸: R_3 。 $T = 0.36$ 。赤: シミュレーション、水色: S_4 、紫: A_1 、
緑: A_2 、黒: A_3 。

$T = 0.36$ まで、非対称混合解が存在する。

(v) $T = 0.42$ のとき

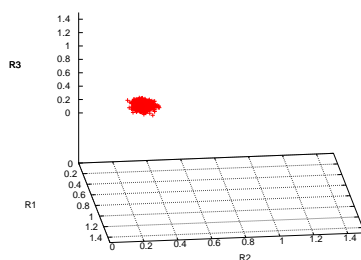


図 30: 3次元で見る各解の位置関係
x 軸: R_2 、y 軸: R_1 、z 軸: R_3 。 $T = 0.42$ 。赤: シミュレーション。

$T=0.42$ で連続解が存在しなくなる。

3.5 ノイズを加えた場合

連続解は相関 $a > 0$ のときには、 $p = 3$ までしか存在しないことが理論及び数値結果からわかった。次に、この相互作用にノイズを加えた場合を考える。相関をもつパターン間にノイズが加わることで、 $a = 0$ と似た状態が作り出せるのではないかと予想できる。すなわち、連続解が $p = 4$ 以降にも現れることが期待される。

今回与えるノイズは、記憶させるパターン $\xi_i^\mu = \pm 1$ を $noise = 0 \sim 0.5$ の確率で反転させるものである。以下の図 31 ~ 42 は R_μ の時系列のグラフである。 $a = 0.1, T = 0.1, N = 8000$ 。100000mcs を 100mcs おきに描く。 $noise = 0.2, 0.25, 0.3$ の結果を出力した。先ほどと同様に、10 個用意したサンプルの中で、一番大きな ΔR_μ の標準偏差を示すデータを示す。

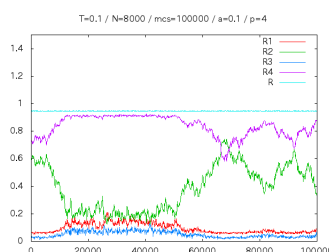
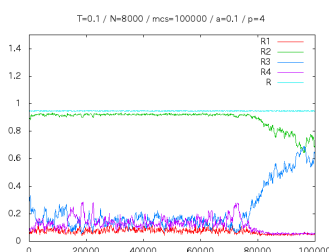
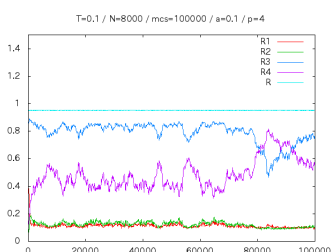


図 31: $p = 4$, $noise = 0.2$ 図 32: $p = 4$, $noise = 0.25$ 図 33: $p = 4$, $noise = 0.3$

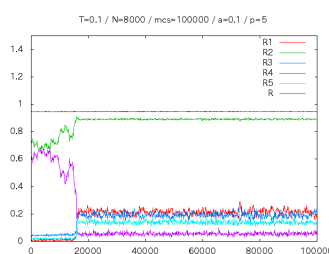
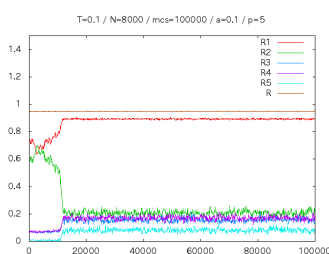
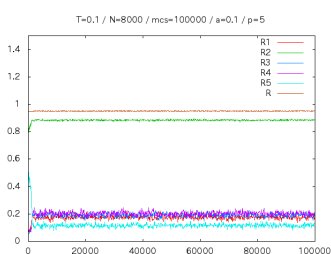


図 34: $p = 5$, $noise = 0.2$ 図 35: $p = 5$, $noise = 0.25$ 図 36: $p = 5$, $noise = 0.3$

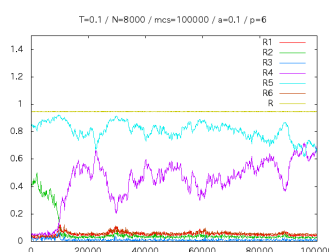
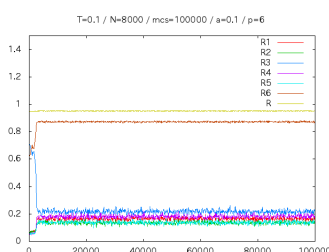
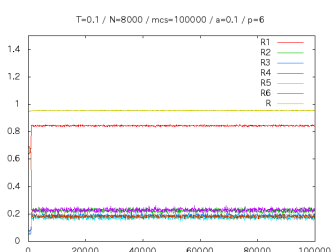


図 37: $p = 6$, $noise = 0.2$ 図 38: $p = 6$, $noise = 0.25$ 図 39: $p = 6$, $noise = 0.3$

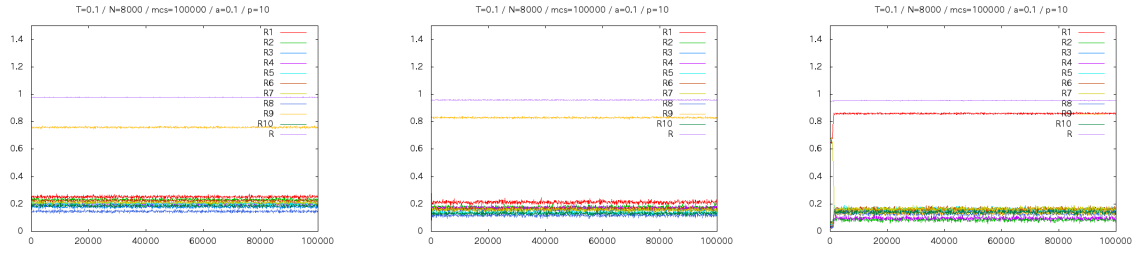


図 40: $p = 10$, $noise = 0.2$ 図 41: $p = 10$, $noise = 0.25$ 図 42: $p = 10$, $noise = 0.3$

$noise = 0.2$ のとき、図 31 から、 $p = 3$ までしか見られなかった連続解が $p = 4$ でも現れていることがわかる。 $noise = 0.25$ に増やすと、図 35、38 でも連続解になりかけているように見える。 $noise = 0.3$ では、 $p = 6$ にも連続解が見られる。

以上より、予想通りノイズによってパターン間の相関が崩れ、連続解がより大きな p まで安定となるという結果が得られた。

4 まとめと考察

我々は連想記憶型相互作用を有する古典 XY モデルにおいて、パターン数を p 、XY スピンの数を N としたとき、 $\alpha = \frac{p}{N} = 0$ の場合について解析した。下の表 4 に、安定な解をまとめる。

	$a = 0$	$a > 0$
$p = 2$	連続解 ($T \leq \frac{J}{2}$) 記憶パターン ($T \leq \frac{J}{2}$)	連続解 ($T \leq \frac{(1-a)J}{2}$) 対称混合解 $S_1(\frac{(1-a)J}{2} < T \leq \frac{(1+a)J}{2})$
$p = 3$	連続解 ($T \leq \frac{J}{2}$) 記憶パターン ($T \leq \frac{J}{2}$)	連続解 ($T < T_c$) 対称混合解 $S_4(T_c \leq T \leq \frac{(1+2a)J}{2})$

表 4: $p = 2, 3$ における安定な解一覧

$a = 0$ のとき、連続解は理論上では任意の p で存在し、存在する限り安定であるという結果が得られたが、数値シミュレーションでは、 $N = 8000$ で、 $p = 36$ までしか存在しなかった。理論計算では $N \rightarrow \infty$ として計算したので、このずれは有限サイズ効果によるものと考えられる。記憶パターンは連続解の端の解となっているので、安定性は連続解と同様である。対称混合解は存在しない。

$a > 0$ のとき、連続解は $p = 2$ の場合 $T \leq \frac{(1-a)J}{2}$ で安定である。 $p = 3$ の場合 $x_1 = 3x_2$ によって決まる温度 T_c より低温の状態が存在して安定であり、任意の 2 つのパターンを繋いでいる。例えば、 $a = 0.1$ のとき $T_c = 0.42$ となる。記憶パターンは $a \neq 0$ では存在せず、連続解の端として化けて現れる。 $T > T_c$ のとき、対称

混合解 S_4 が安定となる。 S_4 は $T < T_c$ で不安定で、 $T > \frac{(1+2a)J}{2}$ では存在しない。連続解と対称混合解に共存領域は存在しない。

一般的な p における、連続解の存在条件について考察する。 $a = 0$ のとき、連続解は任意の p で存在している。 p 個ある R_μ の内、任意の 2 つだけが 0 でない値をもち、残る $p-2$ 個のパターンは 0 となる。一方 $a > 0$ となると、連続解は $p = 2, 3$ のときにしか現れない。その理由は条件式の数が増え、独立変数の数よりも多くなってしまふことにある。よって理論と数値結果が一致し、連続解の存在条件を求めることが出来た。

次に、ノイズを加えた数値計算についてまとめる。

相関 $a > 0$ のとき、連続解は $p = 3$ までしか存在しないことが、理論的にも数値結果からも求められた。これはパターン間に相関があることで、それぞれの記憶パターンが似ており、記憶が想起されにくくなっているためであった。反対に、パターン間に相関がなければ、記憶の想起に影響を受けず、それぞれをはっきりと思い出すことが出来る。従って、 $a > 0$ のときにも相関が崩れれば、 $p \geq 4$ でも連続解が安定となることが予想される。

数値シミュレーションの結果を見ると、ノイズを増やせば増やすほど、連続解が現れる p の範囲が広がることがわかった。ノイズの値が 0.3 のときには $p = 6$ まで連続解が現れ、予想通りの結果となった。

我々は今回、連続解と判断する手段に、最大値を取る R_μ と 2 番目に大きな値を取る R_μ の差 ΔR_μ の標準偏差を用いた。しかしながら、標準偏差の値からだけでは、図 34~38 のように、連続解ではなく記憶パターンとなっているもの、始めは連続解となっても後に記憶パターンに収束してしまっているものも、誤って連続解であると判断されてしまう。今回、サンプル数を 10 個でシミュレーションを行ったが、連続解であると即座に判断できる指標があれば、より多くのサンプル数で、ノイズを加えた結果を出すことが出来たろう。より多くの初期条件でシミュレーションを行えば、より大きな p でも連続解が発見されていた可能性がある。

最後に、数値シミュレーションにおける、連続解から記憶パターンへの転移点 p_c を調べる手法について考察する。

本研究では連続解と判断する手段の一つとして、最大値を取る R_μ と 2 番目に大きな値を取る R_μ の差 ΔR_μ の標準偏差を用いた。研究の初期では、我々は時系列のグラフにおいて最大値を取る R_μ と 2 番目に大きい R_μ の値を縦軸に取り、横軸に容量 $\alpha = \frac{p}{N}$ を取る手法を用いていた。2 番目に大きい R_μ が 0 となった点が、まさに転移点 p_c であると考えたのである。ところが、連続解はパターン間をランダムウォークし、非常に揺らぎが大きいということが問題となった。転移が起きる小さい p のとき、最大値を取る R_μ と 2 番目に大きい R_μ はランダムに入れ替わり、常に揺らいでいる。この揺らぎは、 N が小さくなればなるほど顕著に現れる。ア

ニーリングを用いることで、 $\beta = \frac{1}{T} = 2, 3, \dots, 10$ と温度を変化させてモンテカルロシミュレーションを行ってみたが、結果は図 43 の示すように、大きな差は見られなかった。連続解の大きな特徴の一つである、2つの0でないパターン間のランダムウォークによって、正確な p_c を求めることができないのである。従ってこの問題が解決出来なければ、 p_c の N 依存性を調べることも困難である。

解決策として挙げられるのは、一目見て連続解であるとわかるような指標を、連続解の特徴から設定することである。その指標となるものが、現在判明している連続解の特徴から成るのか、もしくは新たな連続解の特徴付けから成るものなのか、現時点では判断することができない。今後すぐに対応できる課題としては、 ΔR_μ の標準偏差を用いた際、誤って連続解と判断されてしまうものを取り除く手段を確立することであると考えられる。図 34~38 のようなグラフを、連続解ではなく記憶パターンであると判断するためには、急激に増減が起こっている R_μ の値を取り除くプログラムが必要である。グラフから連続解の有無を判断する場合、現時点での最終的な判断は、目を見て確認することなので、今後研究を進めるには連続解と記憶パターンの境目をはっきりと定義しなければならない。

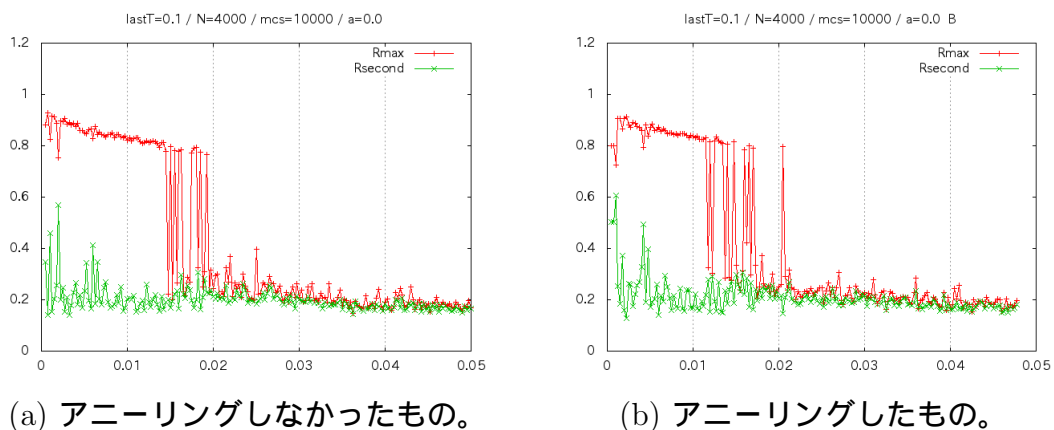


図 43: $a = 0$ 、 $N = 4000$ 。縦軸:最大値を取る R_μ と 2 番目に大きい R_μ 、横軸: $\alpha = \frac{p}{N}$ 。

5 今後の課題

今後の課題として以下のものが挙げられる。

5.1 連続解の更なる特徴付け

本研究では N が有限のとき、シミュレーションにより連続解が存在する上限 p_c を求めるため、連続解となっている最大値を取る R_μ と 2 番目に大きな値を取る R_μ の差 ΔR_μ の標準偏差、及び時系列のグラフを用いた。パターン数 p が増えていくにつれ、0 でない 2 つの R_μ の差は広がっていく。更に p が増えると 0 でない R_μ が

1つのみになり、記憶パターンとなる。この転移の境目は非常にわかりにくく、転移する p の値を正確に求めることは難しい。連続解についての研究を進めるには、より明確に解が連続解となっていると判断できる指標が必要である。

5.2 p_c の N 依存性

連続解の臨界点 p_c の XY スピン数 N 依存性を調べることを試みたが、以下のような問題が発生した。連続解は任意の2つのパターン間を自由に行き来し、ランダムウォークをする。 N が小さければ小さい程、ランダムウォークの振幅は大きくなる。それによって揺らぎが大きくなり、連続解が記憶パターンか、どちらの解になっているかの判断が困難となるのである。解決策として、前述した連続解の新たな特徴付けが必要であると考えられる。

5.3 レプリカ法を用いた解析

$a = 0, a > 0$ それぞれの場合について、パターンにノイズが入った場合についてレプリカ法により解析する。

6 謝辞

本研究を進めるにあたって、指導教官である上江洌達也先生は、理論計算、プログラミングにおいても、常に的確なアドバイスをしてくださり、お忙しい中いつも丁寧に指導してくださいました。興味深いテーマについて研究出来たこと、厚くお礼申し上げます。

3年前から開始した週一回の報告会を、本研究室の清川修二先生が提案して下さったことで、実りある研究を続けることができたと感じております。研究についてのアドバイスだけでなく、研究室の環境作りについての相談にも乗ってくださり、心よりお礼申し上げます。

共同研究者である大分高等専門学校の木本智幸先生は、学会でお会いする度気にかけてくださいました。メールでの急な質問にも対応して下さったこともあり、温かいお心遣いに深くお礼申し上げます。

現在、京都大学大学院にいる、本研究室の元同回生である田尻華奈さんが、非常に重要な理論計算でアイデアを出してくれました。お陰で大きく研究を進めることが出来き、感謝しています。

そして理論計算に助言をくださった、非平衡ダイナミクス研究室の狐崎先生、又その研究室の皆様にも大変お世話になりました。ありがとうございました。

ここに深く、お礼申し上げます。

7 付録

7.1 鞍点方程式の全ての解

ここでは $p = 2, 3$ について、任意の a で鞍点方程式の解を全て導出する。2.6 節より、鞍点方程式は次式で与えられる。

$$R_{\mu R} = \beta J \sum_{\nu=1}^p c_{\mu\nu} R_{\nu R} \quad (245)$$

$$R_{\mu I} = \beta J \sum_{\nu=1}^p c_{\mu\nu} R_{\nu I} \quad (246)$$

7.1.1 $p = 2$ のとき

$R_1 \neq 0$ とする。回転対称性から、 $R_{1I} = 0$ とおける。 R_{1R}, R_{2R}, R_{2I} が変数である。 $p = 2$ のときの確率 P_l は、

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{2} \right)^2 = \frac{1 + a}{4} = P_3 \quad (247)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{2} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2} \right) \\ &= \frac{1 - a}{4} = P_4 \end{aligned} \quad (248)$$

$c_{\mu\nu}$ の定義式から、

$$c_{11} = 2P_1 u_1 + 2P_2 u_2 = c_{22} \quad (249)$$

$$c_{12} = 2P_1 u_1 - 2P_2 u_2 = c_{21} \quad (250)$$

Ξ_l の定義式から、

$$\Xi_1^2 = R^2 + 2R_{1R}R_{2R} \quad (251)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 - 2R_{1R}R_{2R} \quad (252)$$

鞍点方程式から、

$$R_{1R} = \beta J (c_{11} R_{1R} + c_{12} R_{2R}) \quad (253)$$

$$R_{2R} = \beta J (c_{12} R_{1R} + c_{11} R_{2R}) \quad (254)$$

$$R_{1I} = \beta J (c_{11} R_{1I} + c_{12} R_{2I}) \quad (255)$$

$$R_{2I} = \beta J (c_{12} R_{1I} + c_{11} R_{2I}) \quad (256)$$

I. $R_2 = 0 \Rightarrow$ 記憶パターン

$R_{1I} = R_{2R} = R_{2I} = 0$ とすると、 $R_1 = |R_{1R}|$ より、式 (253) から $c_{11} = \frac{1}{\beta J}$ がわかる。式 (254) より $c_{12} = 0$ 。これらを $c_{\mu\nu}$ の定義式に代入すると $P_1 u_1 = P_2 u_2 = \frac{1}{\beta J}$ が得られ、

$$u_1 = \frac{1}{(1+a)\beta J} \quad (257)$$

$$u_2 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (258)$$

がわかる。今 $R_{2R} = R_{2I} = 0$ であるので、式 (251)、(252) は、

$$\Xi_1 = \Xi_2 = R \quad (259)$$

$$x_1 = x_2 \quad (260)$$

以上のことから、関数 u_l は $u_1 = u_2$ となり、記憶パターンは $a = 0$ のときのみ存在するということがわかる。臨界点 T_c は

$$T_c = \frac{J}{2} \quad (261)$$

II. $R_2 \neq 0, R_{2I} \neq 0 \Rightarrow$ 連続解

$R_{2I} \neq 0$ とする。式 (256) より、 $c_{11} = \frac{1}{\beta J}$ 。これを式 (254) に代入。 $R_{1R} \neq 0$ なので $c_{12} = 0$ となる。以上より記憶パターンのときと同様の計算をして、

$$u_1 = \frac{1}{(1+a)\beta J} \quad (262)$$

$$u_2 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (263)$$

また、式 (251) と (252) の辺々足して、

$$\Xi_1^2 + \Xi_2^2 = 2R^2 \quad (264)$$

よって、

$$R = \frac{\sqrt{\Xi_1^2 + \Xi_2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{2}\beta J} \quad (265)$$

$a = 0$ ならば、 $u_1 = u_2, x_1 = x_2$ 。従って $R = \frac{x_1}{\beta J} = \Xi_1$ となり、式 (251) より $R_{1R}R_{2R} = 0$ 。 $R_{1R} \neq 0$ であるので、 $R_{2R} = 0$ 。以上から

$$R^2 = R_{1R}^2 + R_{2I}^2 \quad (266)$$

よって、 R_{1R} と R_{2I} のいずれかは自由に变化できる。つまり 1 パラメータファミリーとなっているので、連続解である。

次に $a \neq 0$ の場合を考える。式 (251) と (252) の辺々引くと、

$$R_{2R} = \frac{1}{4R_{1R}}(\Xi_1^2 - \Xi_2^2) \quad (267)$$

となり、 R_{1R} と R_{2R} の関係式が得られる。また R_{2I} は R の定義より、

$$R_{2I}^2 = R^2 - R_{1R}^2 - R_{2R}^2 \quad (268)$$

これを解くと $R_{2I}^2 \geq 0$ より、

$$\frac{\Xi_1 - \Xi_2}{2} \leq |R_{1R}| \leq \frac{\Xi_1 + \Xi_2}{2} \quad (269)$$

以上より、1 パラメータファミリーであることがわかり、連続解となっている。

III. $R_2 \neq 0, R_{2I} = 0$

$R_{1R}, R_{2R} \neq 0$ であるので、式 (253)、(254) より、

$$\{\beta J(c_{11} + c_{12}) - 1\} \{\beta J(c_{11} - c_{12}) - 1\} = 0 \quad (270)$$

A. $\beta J(c_{11} + c_{12}) = 1$ と B. $\beta J(c_{11} - c_{12}) = 1$ で場合分けをする。

III-A. $\beta J(c_{11} + c_{12}) = 1$ の場合

式 (249)+式 (250) より、 $c_{11} + c_{12} = 4P_1 u_1$ であるから、

$$u_1 = \frac{1}{(1+a)\beta J} \quad (271)$$

また $\beta J(c_{11} + c_{12}) = 1$ より βc_{11} を求めて式 (253) に代入すると、

$$c_{12}(R_{1R} - R_{2R}) = 0 \quad (272)$$

A-1. $c_{12} = 0$ と A-2. $R_{1R} = R_{2R}$ で場合分けをする。

III-A-1. $c_{12} = 0$ のとき \Rightarrow 連続解

このとき式 (253) より、 $c_{11} = \frac{1}{\beta J}$ 。式 (250) より、

$$u_2 = \frac{P_1}{P_2} u_1 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (273)$$

となり、 x_2 が決まる。また、 $u_1 = \frac{1}{(1+a)\beta J}$ であるので、これは連続解と同じ。又、

$$R^2 = R_{1R}^2 + R_{2R}^2 \quad (274)$$

III-A-2. $R_{1R} = R_{2R}$ のとき \Rightarrow 対称混合解 : S_1

$R_{1R} = R_{2R}, R_{1I} = R_{2I} = 0$ であるので、

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 = 2R_1^2 \quad (275)$$

また式 (251)、(252) より、

$$\Xi_1^2 = R^2 + 2R_1^2 = 2R^2 \quad (276)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 - 2R_1^2 = 0 \quad (277)$$

よって $\Xi_l = \frac{x_l}{\beta J}$ なので、 $x_2 = 0$ 。以上から、

$$R = \frac{x_1}{\sqrt{2}\beta J} \quad (278)$$

$$R_1 = R_2 = \frac{x_1}{2\beta J} \quad (279)$$

III-B. $\beta J(c_{11} - c_{12}) = 1$ の場合

式 (249)-式 (250) より、 $c_{11} - c_{12} = 4P_2u_2$ であるから、

$$u_2 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (280)$$

また $\beta J(c_{11} - c_{12}) = 1$ より βc_{11} を求めて式 (253) に代入すると、

$$c_{12}(R_{1R} + R_{2R}) = 0 \quad (281)$$

B-1. $c_{12} = 0$ と B-2. $R_{1R} = -R_{2R}$ で場合分けをする。

III-B-1. $c_{12} = 0$ のとき \Rightarrow A-1 と同様、連続解

III-B-2. $R_{1R} = -R_{2R}$ のとき \Rightarrow 対称混合解 : S_2

$R_{1R} = -R_{2R}, R_{1I} = R_{2I} = 0$ であるので、

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 = 2R_1^2 \quad (282)$$

また式 (251)、(252) より、

$$\Xi_1^2 = R^2 - 2R_1^2 = 0 \quad (283)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 + 2R_1^2 = 2R^2 \quad (284)$$

よって $\Xi_l = \frac{x_l}{\beta J}$ なので、 $x_1 = 0$ 。以上から、

$$R = \frac{x_2}{\sqrt{2}\beta J} \quad (285)$$

$$R_1 = R_2 = \frac{x_2}{2\beta J} \quad (286)$$

以上で全ての場合が示された。

7.1.2 $p = 3$ のとき

$R_1 \neq 0$ とする。回転対称性から、 $R_{1I} = 0$ とおける。 $R_{1R}, R_{2R}, R_{2I}, R_{3R}, R_{3I}$ が変数である。 $p = 3$ のときの確率 P_l は、

$$P_1 = \frac{1 + 3a}{8} = P_5 \quad (287)$$

$$P_2 = \frac{1 - a}{8} = P_3 = P_4 = P_6 = P_7 = P_8 \quad (288)$$

$c_{\mu\nu}$ の定義式から、

$$c_{11} = 2P_1u_1 + 2P_2(u_2 + u_3 + u_4) = c_{22} = c_{33} \quad (289)$$

$$c_{12} = 2P_1u_1 + 2P_2(u_2 - u_3 - u_4) = c_{21} \quad (290)$$

$$c_{13} = 2P_1u_1 + 2P_2(-u_2 - u_3 + u_4) = c_{31} \quad (291)$$

$$c_{23} = 2P_1u_1 + 2P_2(-u_2 + u_3 - u_4) = c_{32} \quad (292)$$

Ξ_l の定義式から、

$$\Xi_1^2 = R^2 + 2a' + 2b' + 2c' \quad (293)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 + 2a' - 2b' - 2c' \quad (294)$$

$$\Xi_3^2 = R^2 - 2a' - 2b' + 2c' \quad (295)$$

$$\Xi_4^2 = R^2 - 2a' + 2b' - 2c' \quad (296)$$

このとき、

$$a' = R_{1R}R_{2R} + R_{1I}R_{2I} \quad (297)$$

$$b' = R_{1R}R_{3R} + R_{1I}R_{3I} \quad (298)$$

$$c' = R_{2R}R_{3R} + R_{2I}R_{3I} \quad (299)$$

鞍点方程式から、

$$R_{1R} = \beta J(c_{11}R_{1R} + c_{12}R_{2R} + c_{13}R_{3R}) \quad (300)$$

$$R_{2R} = \beta J(c_{12}R_{1R} + c_{11}R_{2R} + c_{23}R_{3R}) \quad (301)$$

$$R_{3R} = \beta J(c_{13}R_{1R} + c_{23}R_{2R} + c_{11}R_{3R}) \quad (302)$$

$$R_{1I} = 0 \quad (303)$$

$$R_{2I} = \beta J(c_{11}R_{2I} + c_{23}R_{3I}) \quad (304)$$

$$R_{3I} = \beta J(c_{23}R_{2I} + c_{11}R_{3I}) \quad (305)$$

I. $(R_2, R_3) = (0, 0) \Rightarrow$ 記憶パターン

II. $(R_{2I}, R_{3I}) \neq (0, 0)$

式 (304)、(305) より

$$(1 - \beta J c_{11})^2 - (-\beta J c_{23})^2 = 0 \quad (306)$$

$$\{\beta J(c_{11} + c_{23}) - 1\} \{\beta J(c_{11} - c_{23}) - 1\} = 0 \quad (307)$$

また、 $R_{1R} \neq 0$ なので、式 (300) ~ (302)、(306) より

$$-(\beta J c_{11} - 1)(c_{12}^2 + c_{13}^2) + 2\beta J c_{12} c_{13} c_{23} = 0 \quad (308)$$

A. $\beta J(c_{11} + c_{23}) = 1$ と B. $\beta J(c_{11} - c_{23}) = 1$ で場合分けをする。

II-A. $\beta J(c_{11} + c_{23}) = 1$ の場合

$\beta J(c_{11} + c_{23}) = 1$ より $\beta J c_{11} - 1$ を求めて式 (308) に代入。

$$c_{23}(c_{12} + c_{13})^2 = 0 \quad (309)$$

A-1. $c_{23} = 0$ のときと、A-2. $c_{23} \neq 0$ のときで場合分けをする。

II-A-1. $c_{23} = 0$ のとき \Rightarrow 連続解

式 (304)、(305) より、 $c_{11} = \frac{1}{\beta J}$ 。式 (301)(302) より $c_{12} = c_{13} = 0$ がわかる。 $c_{23} = 0$ と、式 (290)、(291) が 0 となることから、 $u_2 = u_3 = u_4$, $P_1 u_1 = P_2 u_2$ が得られる。式 (289) より $8P_1 u_1 = c_{11}$ 。 $c_{11} = \frac{1}{\beta J}$ であるので、

$$u_1 = \frac{1}{8P_1 \beta J} = \frac{1}{(1 + 3a)\beta J} \quad (310)$$

$$u_2 = \frac{P_1}{P_2} u_1 = \frac{1}{(1 - a)\beta J} \quad (311)$$

これにより、 $x_1, x_2 = x_3 = x_4$ が一意的に決まる。 x_l と Ξ_l の関係式は、 $x_l = \beta J \Xi_l$ 。式 (294) ~ (296) より $a' = b' = c'$ 。よって

$$\Xi_1^2 = R^2 + 6a' \quad (312)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 - 2a' = \Xi_3^2 = \Xi_4^2 \quad (313)$$

辺々引くと、

$$a' = \frac{x_1^2 - x_2^2}{8(\beta J)^2} \quad (314)$$

を得る。 $a' = b'$ なので定義から、

$$R_{2R} = \frac{a'}{R_{1R}} = \frac{b'}{R_{1R}} = R_{3R} \quad (315)$$

次に辺々足すと、

$$R^2 = \frac{1}{2}(\Xi_1^2 + \Xi_2^2 - 4a) = \frac{x_1^2 + 3x_2^2}{4(\beta J)^2} \quad (316)$$

がわかる。式 (315) と $a' = b' = c' = R_{2R}^2 + R_{2I}R_{3I}$ から、

$$R_{2I}R_{3I} = a' - R_{2R}^2 \quad (317)$$

これらを R の式に代入。両辺に R_{2I}^2 を掛けて移項すると、

$$R_{2I}^4 + (R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2)R_{2I}^2 + (a' - R_{2R}^2)^2 = 0 \quad (318)$$

R_{2I}^2 と R_{3I}^2 はそれぞれ同じ式を満たすので、この方程式の解より、

$$R_{2I}^2 = \frac{-(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2) + \sqrt{(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2)^2 - 4(a' - R_{2R}^2)^2}}{2} \quad (319)$$

$$R_{3I}^2 = \frac{-(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2) - \sqrt{(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2)^2 - 4(a' - R_{2R}^2)^2}}{2} \quad (320)$$

これは1パラメータファミリーとなっているので、連続解である。 $R_{2I}^2 \geq 0$ となる R_{1R} の範囲については7.4節を参照。

更に相関 $a = 0$ とすると、 $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ 。式 (314) より、 $a' = b' = c' = 0$ 。従って式 (315) より、 $R_{2R} = R_{3R} = 0$ 。 $c' = R_{2I}R_{3I} = 0$ となるので、 $R_{2I} = 0$ 又は $R_{3I} = 0$ 。つまり、 R_μ の内0でないのは2つのみとなる。

II-A-2. $c_{23} \neq 0$ のとき

式 (309) より $c_{12} + c_{13} = 0$ 。式 (290)(291) より、 $P_1u_1 = P_2u_3$ 。式 (289)(292) より、

$$c_{11} = 4P_1u_1 + 2P_2(u_2 + u_4) \quad (321)$$

$$c_{23} = 4P_1u_1 + 2P_2(-u_2 - u_4) \quad (322)$$

$\beta J(c_{11} + c_{23}) = 1$ より $8P_1u_1\beta J = 1$ となるので、

$$u_1 = \frac{1}{8\beta JP_1} = \frac{1}{(1+3a)\beta J} \quad (323)$$

$$u_3 = \frac{P_1}{P_2}u_1 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (324)$$

これにより、 x_1, x_3 が求まる。式 (304) より、

$$(1 - \beta Jc_{11})R_{2I} = \beta Jc_{23}R_{3I} \quad (325)$$

$\beta J(c_{11} + c_{23}) = 1$ なので

$$R_{2I} = R_{3I} \quad (326)$$

式 (300) より、 $c_{12} + c_{13} = 0$ なので、

$$R_{1R} = \frac{c_{12}}{c_{23}}(R_{2R} - R_{3R}) \quad (327)$$

式 (301) より、

$$(1 - \beta J c_{11})R_{2R} = \beta J(c_{12}R_{1R} + c_{23}R_{3R}) \quad (328)$$

式 (327) を代入して、

$$(c_{23}^2 - c_{12}^2)(R_{3R} - R_{2R}) = 0 \quad (329)$$

$(c_{23}^2 - c_{12}^2) \neq 0$ とすると $R_{2R} = R_{3R}$ だが、式 (327) より $R_{1R} = 0$ となってしまうので不適。よって

$$c_{23}^2 - c_{12}^2 = 0 \quad (330)$$

A-2-1. $c_{12} = c_{23}$ と A-2-2. $c_{12} = -c_{23}$ で場合分けをする。

II-A-2-1. $c_{12} = c_{23}$ のとき \Rightarrow 非対称混合解 : A_1

式 (327) より、

$$R_{1R} = R_{2R} - R_{3R} \quad (331)$$

式 (290)=(292) より $u_2 = u_3$, $x_2 = x_3$, $\Xi_2 = \Xi_3$ がわかり、また式 (294)=(295) より $a' = c'$ なので

$$R_{1R}R_{2R} = R_{2R}R_{3R} + R_{2I}R_{3I} \quad (332)$$

がわかる。 $a' = c'$ が得られたので、式 (293) ~ (296) より、

$$\Xi_1^2 = R^2 + 4a' + 2b' \quad (333)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 - 2b' \quad (334)$$

$$\Xi_4^2 = R^2 - 4a' + 2b' \quad (335)$$

また、

$$R^2 = R_{1R}^2 + R_{2R}^2 + R_{2I}^2 + R_{3R}^2 + R_{3I}^2 \quad (336)$$

式 (326)(331)(332)(333)(334)(335) より 5 つの変数と x_4 が決まるので、これは連続解ではない。これらを解くと、 a', b', c' で R_{1R} など表せる。

$R_{1I} = 0$ 、式 (326)、(331) より、式 (336) は $a' = R_{1R}R_{2R}$ を用いて

$$\begin{aligned} R^2 &= R_{1R}^2 + R_{2R}^2 + 2R_{2I}^2 + (R_{2R} - R_{1R})^2 \\ &= 2R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 + 2R_{2I}^2 - 2a' \end{aligned} \quad (337)$$

$b' = R_{1R}R_{3R}$ と式 (331) より、

$$R_{1R} = \frac{b'}{R_{3R}} = \frac{b'}{R_{2R} - R_{1R}} \quad (338)$$

$$R_{1R}^2 = a' - b' \quad (339)$$

$R_{1R}^2 = a' - b'$ と a' の定義より、

$$R_{2R}^2 = \frac{a'^2}{R_{1R}^2} = \frac{a'^2}{a' - b'} \quad (340)$$

これより $a' > b'$ 。 $a' = R_{1R}R_{2R}$ 、 $b' = R_{1R}R_{3R}$ を辺々割ると、

$$R_{3R} = \frac{b'}{a'} R_{2R} \quad (341)$$

求まった R_{3R} を $a' = c'$ の式に代入して、 R_{2I}^2 を求める。

$$R_{2I}^2 = \frac{a'^2 - b'R_{2R}^2}{a'} = a' - \frac{a'b'}{a' - b'} \quad (342)$$

式 (333) に以上の式を代入

$$\Xi_1^2 = R^2 + 4a' + 2b' = 8a' \quad (343)$$

$$a' = \frac{1}{8}\Xi_1^2 \quad (344)$$

式 (334) も同様に

$$\Xi_2^2 = R^2 - 2b' = 4(a' - b') \quad (345)$$

式 (335) は

$$\Xi_4^2 = R^2 - 4a' + 2b' = 0 \quad (346)$$

よって $x_4 = 0$ 。(343) - 2 × (345) より、

$$b' = \frac{1}{8}(\Xi_1^2 - 2\Xi_2^2) \quad (347)$$

よって式 (334) より、

$$R^2 = \Xi_2^2 + 2b' = \frac{1}{4}(\Xi_1^2 + 2\Xi_2^2) \quad (348)$$

a', b', c' がわかったので、 $R_{1R}, R_{2R}, R_{2I}, R_{3R}, R_{3I}$ を求めることができる。

$$R_{1R}^2 = a' - b' = \frac{1}{4}\Xi_2^2 \quad (349)$$

$$R_{2R}^2 = \frac{a'^2}{a' - b'} = \frac{\Xi_1^4}{16\Xi_2^2} \quad (350)$$

$$R_{3R}^2 = \left(\frac{b'}{a'}\right)^2 R_{2R}^2 = \frac{1}{16\Xi_2^2}(\Xi_1^2 - 2\Xi_2^2)^2 \quad (351)$$

$$\begin{aligned} R_{2I}^2 &= R_{1R}R_{2R} - R_{2R}R_{3R} = \frac{\Xi_1^2}{16\Xi_2^2}(4\Xi_2^2 - \Xi_1^2) \\ &= R_{3I}^2 \end{aligned} \quad (352)$$

II-A-2-2. $c_{12} = -c_{23}$ のとき \Rightarrow 非対称混合解： A_2
式 (327) より、

$$R_{3R} = R_{1R} + R_{2R} \quad (353)$$

式 (290)=(292) より $P_1u_1 = P_2u_4$ であるので、

$$u_4 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (354)$$

これは前に求めた u_3 と同じなので $x_3 = x_4$ 。式 (295)=(296) より $b' = c'$ 。よって、

$$R_{1R}R_{3R} = R_{2R}R_{3R} + R_{2I}R_{3I} \quad (355)$$

$b' = c'$ であることがわかったので、式 (293) ~ (296) より、

$$\Xi_1^2 = R^2 + 2a' + 4b' \quad (356)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 + 2a' - 4b' \quad (357)$$

$$\Xi_3^2 = R^2 - 2a' \quad (358)$$

$$R^2 = R_{1R}^2 + R_{2R}^2 + R_{2I}^2 + R_{3R}^2 + R_{3I}^2 \quad (359)$$

式 (326)(353)(355)(356)(357)(358) より 5 つの変数と x_2 が決まるので、これは連続解ではない。A-2-1 と同様の計算をする。

$R_{1I} = 0$ 、式 (326)、(353) より、式 (359) は $a' = R_{1R}R_{2R}$ を用いて

$$\begin{aligned} R^2 &= R_{1R}^2 + R_{2R}^2 + 2R_{2I}^2 + (R_{1R} + R_{2R})^2 \\ &= 2R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 + 2R_{2I}^2 + 2a' \end{aligned} \quad (360)$$

$b' = R_{1R}R_{3R}$ と式 (353) より、

$$R_{1R} = \frac{b'}{R_{3R}} = \frac{b'}{R_{1R} + R_{2R}} \quad (361)$$

$$R_{1R}^2 = b' - a' \quad (362)$$

R_{1R} と a' の定義より、

$$R_{2R}^2 = \frac{a'^2}{R_{1R}^2} = \frac{a'^2}{b' - a'} \quad (363)$$

これより $b' > a'$ 。 $a' = R_{1R}R_{2R}$, $b' = R_{1R}R_{3R}$ の辺々を割ると、

$$R_{3R} = \frac{b'}{a'} R_{2R} \quad (364)$$

求まった R_{3R} を $b' = c'$ の式に代入し、 R_{2I}^2 を求める。

$$R_{2I}^2 = \frac{a'b' - b'R_{2R}^2}{a'} = b' - \frac{a'b'}{b' - a'} \quad (365)$$

式 (356) に以上の式を代入

$$\Xi_1^2 = R^2 + 2a' + 4b' = 8b' \quad (366)$$

$$b' = \frac{1}{8}\Xi_1^2 \quad (367)$$

式 (358) も同様に

$$\Xi_3^2 = R^2 - 2a' = 4(b' - a') \quad (368)$$

式 (357) は

$$\Xi_2^2 = R^2 + 2a' - 4b' = 0 \quad (369)$$

よって $x_2 = 0$ 。(366) - 2 × (368) より、

$$\Xi_1^2 - 2\Xi_3^2 = 8a' \quad (370)$$

$$a' = \frac{1}{8}(\Xi_1^2 - 2\Xi_3^2) \quad (371)$$

よって式 (358) より、

$$R^2 = \Xi_3^2 + 2a' = \frac{1}{4}(\Xi_1^2 + 2\Xi_3^2) \quad (372)$$

a', b', c' がわかったので、 $R_{1R}, R_{2R}, R_{2I}, R_{3R}, R_{3I}$ を求めることができる。

$$R_{1R}^2 = b' - a' = \frac{1}{4}\Xi_3^2 \quad (373)$$

$$R_{2R}^2 = \frac{a'^2}{b' - a'} = \frac{1}{16\Xi_3^2}(\Xi_1^2 - 2\Xi_3^2)^2 \quad (374)$$

$$R_{3R}^2 = \left(\frac{b'}{a'}\right)^2 R_{2R}^2 = \frac{\Xi_1^4}{16\Xi_3^2} \quad (375)$$

$$\begin{aligned} R_{2I}^2 &= R_{1R}R_{3R} - R_{2R}R_{3R} = \frac{\Xi_1^2}{16\Xi_3^2}(4\Xi_3^2 - \Xi_1^2) \\ &= R_{3I}^2 \end{aligned} \quad (376)$$

II-B. $\beta J(c_{11} - c_{23}) = 1$ の場合

$\beta J(c_{11} - c_{23}) = 1$ より $\beta Jc_{11} - 1$ を求めて式 (308) に代入。

$$c_{23}(c_{12} - c_{13})^2 = 0 \quad (377)$$

B-1. $c_{23} = 0$ のときと、B-2. $c_{23} \neq 0$ のときで場合分けをする。

II-B-1. $c_{23} = 0$ のとき \Rightarrow A-1 と同様、連続解

II-B-2. $c_{23} \neq 0$ のとき

式 (377) より $c_{12} - c_{13} = 0$ 。式 (290)(291) より $u_2 = u_4$ がわかる。 $\beta J(c_{11} - c_{23}) = 1$ に式 (289) と (292) を代入

$$\beta J(4P_2u_2 + 4P_2u_4) = 1 \quad (378)$$

$$u_2 = \frac{1}{8\beta JP_2} = \frac{1}{(1-a)\beta J} = u_4 \quad (379)$$

これにより、 x_2, x_4 が一意的に決まる。式 (304) より、

$$(1 - \beta Jc_{11})R_{2I} = \beta Jc_{23}R_{3I} \quad (380)$$

$\beta J(c_{11} - c_{23}) = 1$ なので

$$R_{2I} = -R_{3I} \quad (381)$$

式 (300) より、 $c_{12} - c_{13} = 0$ なので、

$$R_{1R} = -\frac{c_{12}}{c_{23}}(R_{2R} + R_{3R}) \quad (382)$$

式 (301) より、

$$(1 - \beta Jc_{11})R_{2R} = \beta J(c_{12}R_{1R} + c_{23}R_{3R}) \quad (383)$$

式 (382) を代入して、

$$(c_{23}^2 - c_{12}^2)(R_{2R} + R_{3R}) = 0 \quad (384)$$

$(c_{23}^2 - c_{12}^2) \neq 0$ とすると $R_{2R} = -R_{3R}$ だが、式 (382) より $R_{1R} = 0$ となってしまうので不適。よって

$$c_{23}^2 - c_{12}^2 = 0 \quad (385)$$

B-2-1. $c_{12} = c_{23}$ と B-2-2. $c_{12} = -c_{23}$ で場合分けをする。

II-B-2-1. $c_{12} = -c_{23}$ のとき \Rightarrow 非対称混合解 : A_3
式 (382) より、

$$R_{3R} = R_{1R} - R_{2R} \quad (386)$$

(290) = -(292) より $P_1 u_1 = P_2 u_4$ であるので、

$$u_1 = \frac{P_1}{P_2} u_4 = \frac{1}{(1+3a)\beta J} \quad (387)$$

$$(388)$$

$x_2 = x_4$ なので、式 (294)=(296) より $a' = b'$ 。よって

$$R_{2R} = R_{3R} \quad (389)$$

$a' = b'$ であることがわかったので、式 (293) ~ (296) より、

$$\Xi_1^2 = R^2 + 4a' + 2c' \quad (390)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 - 2c' \quad (391)$$

$$\Xi_3^2 = R^2 - 4a' + 2c' \quad (392)$$

$$R^2 = R_{1R}^2 + R_{2R}^2 + R_{2I}^2 + R_{3R}^2 + R_{3I}^2 \quad (393)$$

式 (381)(386)(389)(390)(391)(392) より 5 つの変数と x_3 が決まるので、これは連続解ではない。A-2-1,A-2-2 と同様の計算をする。

$R_{1I} = 0$ 、式 (381)、(386)、(389) より、式 (393) は

$$R^2 = R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 + 2R_{2I}^2 \quad (394)$$

$b' = R_{1R}R_{3R}$ と式 (386) より、

$$R_{1R} = \frac{b'}{R_{3R}} = \frac{b'}{R_{1R} - R_{2R}} \quad (395)$$

$$R_{1R}^2 = a' + b' = 2a' \quad (396)$$

R_{1R} と a' の定義より、

$$R_{2R}^2 = \frac{a'^2}{R_{1R}^2} = \frac{a'}{2} \quad (397)$$

式 (391) に以上の式を代入して、 R_{2I}^2 を求める。

$$R_{2I}^2 = \frac{\Xi_2^2 - 2a'}{4} \quad (398)$$

(390) + (391) より、

$$\begin{aligned} \Xi_1^2 + \Xi_2^2 &= 2(R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 + 2R_{2I}^2) + 4a' \\ &= 8a' + \Xi_2^2 \end{aligned} \quad (399)$$

よって

$$a' = \frac{\Xi_1^2}{8} = b' \quad (400)$$

(390) - (391) より、

$$\Xi_1^2 - \Xi_2^2 = 4a' + 4c' \quad (401)$$

$$c' = \frac{\Xi_1^2 - 2\Xi_2^2}{8} \quad (402)$$

よって式 (391) より、

$$R^2 = \Xi_2^2 + 2c' = \frac{1}{4}(\Xi_1^2 + 2\Xi_2^2) \quad (403)$$

式 (392) に a', c', R^2 を代入すると、

$$\Xi_3^2 = R^2 - 4a' + 2b' = 0 \quad (404)$$

よって $x_3 = 0$ が得られる。 a', b', c' がわかったので、 $R_{1R}, R_{2R}, R_{2I}, R_{3R}, R_{3I}$ を求めることができる。

$$R_{1R}^2 = 2a' = \frac{1}{4}\Xi_1^2 \quad (405)$$

$$R_{2R}^2 = \frac{a'}{2} = \frac{\Xi_1^2}{16} \quad (406)$$

$$= R_{3R}^2$$

$$R_{2I}^2 = \frac{1}{4}(\Xi_2^2 - 2a') = \frac{1}{16}(4\Xi_2^2 - \Xi_1^2) \quad (407)$$

$$= R_{3I}^2$$

II-B-2-2. $c_{12} = c_{23}$ のとき \Rightarrow 対称混合解 : S_3
 式 (382) より、

$$R_{1R} = -R_{2R} - R_{3R} \quad (408)$$

式 (290)=(292) より $P_2u_2 = P_2u_3$ であるので、 $u_2 = u_3 = u_4$ 。よって (294) = (295) = (296) なので $a' = b' = c'$ がわかる。 $a' = b'$ より、

$$R_{2R} = R_{3R} \quad (409)$$

$a' = c'$ より、

$$R_{1R}R_{2R} = R_{2R}^2 - R_{2I}^2 \quad (410)$$

$a' = b' = c'$ であることがわかったので、式 (293) ~ (296) より、

$$\Xi_1^2 = R^2 + 6a' \quad (411)$$

$$\Xi_2^2 = R^2 - 2a' \quad (412)$$

$$R^2 = R_{1R}^2 + R_{2R}^2 + R_{2I}^2 + R_{3R}^2 + R_{3I}^2 \quad (413)$$

式 (381)(408)(409)(410)(411)(412) より 5 つの変数と x_1 が決まるので、これは連続解ではない。A-2-1,A-2-2,B-1 と同様の計算をする。

$R_{1I} = 0$ 、式 (381)、(408)、(409) より、式 (413) は

$$R^2 = R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 + 2R_{2I}^2 \quad (414)$$

$b' = R_{1R}R_{3R}$ と式 (408) より、

$$R_{1R} = \frac{b'}{R_{3R}} = \frac{b'}{-R_{1R} - R_{2R}} \quad (415)$$

$$R_{1R}^2 = -a' - b' = -2a' \quad (416)$$

求まった R_{1R} と a' の定義より、

$$R_{2R}^2 = \frac{a'^2}{R_{1R}^2} = -\frac{a'}{2} \quad (417)$$

式 (410) より、

$$R_{2I}^2 = R_{2R}^2 - a' = -\frac{3a'}{2} \quad (418)$$

式 (411) に以上の式を代入

$$\Xi_1^2 = R^2 + 6a' = 0 \quad (419)$$

よって $x_1 = 0$ が得られる。式 (412) も同様に、

$$\Xi_2^2 = R^2 - 2a' = -8a' \quad (420)$$

よって

$$a' = -\frac{\Xi_2^2}{8} = b' = c' \quad (421)$$

よって式 (412) より、

$$R^2 = \Xi_2^2 + 2a' = \frac{3}{4}\Xi_2^2 \quad (422)$$

a', b', c' がわかったので、 $R_{1R}, R_{2R}, R_{2I}, R_{3R}, R_{3I}$ を求めることができる。

$$R_{1R}^2 = -2a' = \frac{1}{4}\Xi_2^2 \quad (423)$$

$$\begin{aligned} R_{2R}^2 &= -\frac{a'}{2} = \frac{\Xi_2^2}{16} \\ &= R_{3R}^2 \end{aligned} \quad (424)$$

$$\begin{aligned} R_{2I}^2 &= -\frac{3a'}{2} = \frac{3}{16}\Xi_2^2 \\ &= R_{3I}^2 \end{aligned} \quad (425)$$

今 $R_{1I} = 0$ としているので $R_1 = R_2 = R_3$ 。

III. $(R_{2I}, R_{3I}) = (0, 0) \Rightarrow$ 対称混合解 : S_4

$R_{1I} = R_{2I} = R_{3I} = 0$ なので、 $R_1 = R_2 = R_3$ 。

III-C-1. $R_{1R} = R_{2R} = R_{3R} > 0$ と仮定する

このとき、 $a' = b' = c' = R_1^2$ 。従って

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 3R_1^2 \quad (426)$$

式 (293) より、 $x_1 = 3\beta J R_1$ 。以上から、

$$R_1 = \frac{x_1}{3\beta J} = R_2 = R_3 \quad (427)$$

$$R = \frac{x_1}{\sqrt{3}\beta J} \quad (428)$$

式 (294) ~ (296) より、 $a' = b' = c'$ のとき、

$$x_2 = x_3 = x_4 = \beta J R_1 < x_1 = 3\beta J R_1 \quad (429)$$

鞍点方程式 (300) ~ (302) の辺々を足す。式 (289) ~ (292) より、

$$3 = \beta J(18P_1u_1 + 2P_2u_2 + 2P_2u_3 + 2P_2u_4) \quad (430)$$

$u_2 = u_3 = u_4$ なので、

$$\frac{1}{\beta J} = 6P_1u_1 + 2P_2u_2 \quad (431)$$

u_l を求める。関係式 $x_1 = 3x_2 = 3x_3 = 3x_4$ 、 $u_l = u(x_l)$ より x_1 は以下の式で決まる。

$$\frac{1}{\beta J} = \frac{3}{4}(1 + 3a)u(x_1) + \frac{1}{4}(1 - a)u\left(\frac{x_1}{3}\right) \quad (432)$$

ここで式 (432) から、この対称混合解のときの臨界点を求める。関数 $u(x)$ は x_1 の単調減少関数なので、式 (432) の右辺も x_1 の単調減少関数で、 $x_1 = 0$ のときに最大値 $\frac{1}{2}$ を取る。式 (432) に $u(0) = \frac{1}{2}$ を代入すると臨界点 T_c は

$$T_c = \frac{(1 + 2a)J}{2} \quad (433)$$

であることが導かれる。

III-C-2. $R_{1R} = R_{2R} = -R_{3R} > 0$ と仮定する

仮定を用いて、式 (300)、(301) より

$$1 = \beta J(c_{11} + c_{12} - c_{13}) \quad (434)$$

$$1 = \beta J(c_{12} + c_{11} - c_{23}) \quad (435)$$

従って $c_{13} = c_{23}$ 。また式 (302) より

$$1 = \beta J(c_{11} - 2c_{13}) \quad (436)$$

式 (434)、(436) より $c_{12} = -c_{13}$ 。また $c_{13} = c_{23}$ なので、式 (291)、(292) から

$$2P_1u_1 + 2P_2(-u_2 - u_3 + u_4) = 2P_1u_1 + 2P_2(-u_2 + u_3 - u_4) \quad (437)$$

$$u_3 = u_4 \quad (438)$$

一方、 $c_{12} = -c_{13}$ なので、式 (290)、(291) から

$$2P_1u_1 + 2P_2(u_2 - u_3 - u_4) = -2P_1u_1 - 2P_2(-u_2 - u_3 + u_4) \quad (439)$$

$$P_1u_1 = P_2u_3 \quad (440)$$

従って、

$$u_1 = \frac{P_2}{P_1}u_3 \quad (441)$$

ところが、 $R_{1R} = R_{2R} = -R_{3R} > 0$ のとき $u_1 = u_3 = u_4$ であるので、これは $a = 0$ のときしか成り立たない。

III-C-3. $R_{1R} = -R_{2R} = -R_{3R} > 0$ と仮定する

仮定を用いて、式 (301)、(302) より

$$-1 = \beta J(c_{12} - c_{11} - c_{23}) \quad (442)$$

$$-1 = \beta J(c_{13} - c_{23} - c_{11}) \quad (443)$$

従って $c_{12} = c_{13}$ 。また式 (300) より

$$1 = \beta J(c_{11} - 2c_{12}) \quad (444)$$

式 (442)、(444) より $c_{13} = -c_{23}$ 。また $c_{12} = c_{13}$ なので、式 (290)、(291) から

$$2P_1u_1 + 2P_2(u_2 - u_3 - u_4) = 2P_1u_1 + 2P_2(-u_2 - u_3 + u_4) \quad (445)$$

$$u_2 = u_4 \quad (446)$$

一方、 $c_{13} = -c_{23}$ なので、式 (291)、(292) から

$$2P_1u_1 + 2P_2(-u_2 - u_3 + u_4) = -2P_1u_1 - 2P_2(-u_2 + u_3 - u_4) \quad (447)$$

$$P_1u_1 = P_2u_2 \quad (448)$$

従って、

$$u_1 = \frac{P_2}{P_1}u_2 \quad (449)$$

ところが、 $R_{1R} = -R_{2R} = -R_{3R} > 0$ のとき $u_1 = u_2 = u_4$ であるので、これは $a = 0$ のときしか成り立たない。

7.2 関数 $u(x)$ の性質

$u(x) = \frac{I_1(x)}{xI_0(x)}$ の性質について述べる。変形されたベッセル関数 $I_\nu(z)$ は、複素数 z 、実数 ν について定義されており、負の実数以外で正則である。また、 z が実数のとき、実数となる。証明には、 $I_\nu(z)$ についての公式を用いる (数学公式集 III [9])。

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^n (z^{-\nu}I_\nu(z)) = z^{-\nu-n}I_{\nu+n}(z) \quad (450)$$

$$I_\mu(z)I_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\mu+\nu}(2z \cos \theta) \cos\{(\mu - \nu)\theta\} d\theta \quad (451)$$

$$\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1 \quad (452)$$

ν が整数 n のとき、 $I_n(x)$ は次のように表される。

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \phi} \cos(n\phi) d\phi \quad (453)$$

このとき、 $I_n(x) > 0 (x > 0)$, $I_0(0) = 1$, $I_n(0) = 0 (n > 0)$ である。また、 $u(x) \equiv \frac{I_1(x)}{xI_0(x)}$ は任意の x で正則で、 $x = 0$ のとき $\frac{1}{2}$ となることがわかる。式 (450) で $n = 1$, $\nu = 1$, $z = x$ とすると、

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}I_1(x)) = x^{-1}I_2(x) \quad (454)$$

となる。従って、

$$\frac{d}{dx}u(x) = \frac{1}{xI_0(x)^2}(I_2(x)I_0(x) - I_1(x)^2) \quad (455)$$

となる。次に式 (451) で $\mu = 2$, $\nu = 0$, $z = x$ とした式から、 $\mu = 1$, $\nu = 1$, $z = x$ とした式を引くと、

$$I_2(x)I_0(x) - I_1(x)^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_2(2x \cos \theta) \{\cos(2\theta) - 1\} d\theta \quad (456)$$

となるが、 $x > 0$ なら $2x \cos \theta$ は積分範囲で 0 以上となるので、 $I_2(2x \cos \theta) \geq 0$ となり、積分結果が負となる。よって $x > 0$ のとき $u'(x) < 0$ 。 $x \gg 1$ のときの漸近形は、鞍点法により、

$$I_n(x) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x(1-\frac{\phi^2}{2})} d\phi = e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad (457)$$

となるので、

$$u(x) \simeq \frac{1}{x} \quad (458)$$

以上より、関数 $u(x)$ の近似値が得られた。これは、 $x \rightarrow \infty$ のとき $u(x) \rightarrow 0$ となる。

7.3 $\{\eta_l^\mu\}$ についての関係の証明

はじめに、サブラティスの決め方について説明する。パターン数 p のときのサブラティスを、 $\eta_l^{\mu,(p)}$ ($\mu = 1 \sim p$) と表すことにする。サブラティスの作り方から次式が成り立つ。

$$\eta_{l+2^{p-1}}^{\mu,(p)} = -\eta_l^{\mu,(p)} \quad (l = 1, \dots, 2^{p-1}) \quad (459)$$

	$\eta_1^{1,(2)}$	$\eta_1^{2,(2)}$		$\eta_1^{1,(3)}$	$\eta_1^{2,(3)}$	$\eta_1^{3,(3)}$
l = 1	1	1		1	1	1
l = 2	1	-1		1	1	-1
l = 3	-1	-1		1	-1	-1
l = 4	-1	1		1	-1	1
				l = 5	-1	-1
				l = 6	-1	-1
				l = 7	-1	1
				l = 8	-1	1

表 5: $\eta_l^{\mu,(2)}$ と $\eta_l^{\mu,(3)}$ の関係

また、 $p + 1$ のとき、 $l = 1 \sim 2^p$ の $\eta_l^{2,(p+1)} \sim \eta_l^{p+1,(p+1)}$ は p のときのサブラティスの値と次の関係となるように決める。

$$\eta_l^{\mu,(p+1)} = \eta_l^{\mu-1,(p)} \quad (l = 1, \dots, 2^p) \quad (460)$$

例えば $p = 2, 3$ のサブラティスのときには、表 5 のように決められる。

始めに、

$$\sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^{\mu,(p)} = 0 \quad (p = 2, 3, \dots) \quad (461)$$

$$(\mu \neq 1, \mu = 2, 3, \dots, p)$$

$$\sum_{l=1}^{2^p} \eta_l^{1,(p)} = 0 \quad (462)$$

を示す。 $p = 2$ のときは表 5 より明らか。ここで、 $p \geq 2$ のとき成り立つと仮定する。

$$\eta_l^{1,(p+1)} = -\eta_{l+2^p}^{1,(p+1)} \quad (l = 1, \dots, 2^p) \quad (463)$$

より、式 (462) が $p + 1$ で成り立つ。 $\mu \neq 1$ として、 $p + 1$ のとき式 (461) の左辺は、

$$\sum_{l=1}^{2^p} \eta_l^{\mu,(p+1)} = \sum_{l=1}^{2^p} \eta_l^{\mu-1,(p)} = \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^{\mu-1,(p)} + \sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_{l+2^{p-1}}^{\mu-1,(p)} \quad (464)$$

式 (459) より 0 となる。よって $p + 1$ でも成り立つ。以上より式 (461)、(462) が証明できた。これらを踏まえ、本文中で使用したサブラティスの式を、帰納法を用

いて証明する。
式 (58) の証明

式 (459) より、この式は以下のようにも書ける。

$$\sum_{l=1}^{2^p} \eta_l^{\mu,(p)} \eta_l^{\nu,(p)} = 2^p \delta_{\mu\nu} \quad (465)$$

(i) $p = 2$ のとき
表 5 から、

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \sum_{l=1}^4 \eta_l^{\mu,(2)} \eta_l^{\nu,(2)} = \eta_1^{\mu,(2)} \eta_1^{\nu,(2)} + \eta_2^{\mu,(2)} \eta_2^{\nu,(2)} + \eta_3^{\mu,(2)} \eta_3^{\nu,(2)} + \eta_4^{\mu,(2)} \eta_4^{\nu,(2)} \\ &= \begin{cases} 4 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \end{aligned} \quad (466)$$

$$\text{(右辺)} = 2^2 \delta_{\mu\nu} = 4 \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 4 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (467)$$

よって式 (465) が成り立つ。

(ii) $p = m (\geq 2)$ のとき
式 (465) が成り立つと仮定する。

$$\sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\mu,(m)} \eta_l^{\nu,(m)} = 2^m \delta_{\mu\nu} \quad (468)$$

$p = m + 1$ でもこの式が成り立つことを証明する。

$$\sum_{l=1}^{2^{m+1}} \eta_l^{\mu,(m+1)} \eta_l^{\nu,(m+1)} = 2^{m+1} \delta_{\mu\nu} \quad (469)$$

を示す。

$\mu = \nu$ のとき $\eta_l^\mu \eta_l^\mu = 1$ なので、

$$\text{(左辺)} = 2^{m+1} = \text{(右辺)} \quad (470)$$

$\mu \neq \nu$ のとき、 μ, ν に 1 を含む場合 (サブラティスの表の一番左の列) と、含まない場合の二通り考える必要がある。

(ア) μ, ν に 1 を含まない場合

$\eta_l^{\tau, (m+1)}$ ($\tau \neq 1, l = 1 \sim 2^m$) は、一つ前のパターン $\eta_l^{\tau-1, (m)}$ と一致する。従って式 (469) は、式 (459)、(468) を用いて、

$$(469) \text{ の左辺} = \sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\mu-1, (m)} \eta_l^{\nu-1, (m)} + \sum_{l=2^{m+1}}^{2^{m+1}} \eta_l^{\mu, (m+1)} \eta_l^{\nu, (m+1)} \quad (471)$$

$$= \sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\mu-1, (m)} \eta_l^{\nu-1, (m)} + \sum_{l=1}^{2^m} (-\eta_l^{\mu, (m+1)}) (-\eta_l^{\nu, (m+1)}) \quad (472)$$

式 (469) の左辺の $\eta_l^{\mu, (m+1)}$ と $\eta_l^{\nu, (m+1)}$ で、 $l = 2^m + 1 \sim 2^{m+1}$ は条件式 (459) を各々を用いて符号を反転させたものなので、

$$= 2 \sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\mu-1, (m)} \eta_l^{\nu-1, (m)} \quad (473)$$

$$= 2^{m+1} \delta_{\mu\nu} \quad (474)$$

$$= (469) \text{ の右辺}$$

(イ) μ, ν に 1 を含む場合

$\mu = 1$ とする。サブラティスの表の一番左の列は、

$$\eta_l^{1, (m+1)} = -\eta_{l+2^m}^{1, (m+1)} = 1 \quad (l = 1, \dots, 2^m) \quad (475)$$

となっている。 $\nu > 1$ なので、式 (469) は式 (459)、(461) を用いて、

$$(469) \text{ の左辺} = \sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{1, (m+1)} \eta_l^{\nu, (m+1)} + \sum_{l=2^{m+1}}^{2^{m+1}} \eta_l^{1, (m+1)} \eta_l^{\nu, (m+1)} \quad (476)$$

$$= 1 \times \sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\nu, (m+1)} + (-1) \times \sum_{l=2^{m+1}}^{2^{m+1}} \eta_l^{\nu, (m+1)} \quad (477)$$

$$= 2 \sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\nu, (m+1)} \quad (478)$$

$$= 0 = (469) \text{ の右辺}$$

よって (i), (ii) より、式 (465) が証明できた。

式 (147) の証明

以下の式を証明する。

$$\sum_{l=1}^{2^{p-1}} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \eta_l^1 \eta_l^2 = \begin{cases} 2^{p-1} & (\mu, \nu) = (1, 2) \text{ 又は } (2, 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (479)$$

式 (459) より、この式は以下のようにも書ける。

$$\sum_{l=1}^{2^p} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \eta_l^1 \eta_l^2 = \begin{cases} 2^p & (\mu, \nu) = (1, 2) \text{ 又は } (2, 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (480)$$

(i) $p = 2$ のとき
表 5 から、

$$(\text{左辺}) = \sum_{l=1}^4 \eta_l^{\mu, (2)} \eta_l^{\nu, (2)} \eta_l^{1, (2)} \eta_l^{2, (2)} \quad (481)$$

$$= \eta_1^{\mu, (2)} \eta_1^{\nu, (2)} \eta_1^{1, (2)} \eta_1^{2, (2)} + \eta_2^{\mu, (2)} \eta_2^{\nu, (2)} \eta_2^{1, (2)} \eta_2^{2, (2)} \\ + \eta_3^{\mu, (2)} \eta_3^{\nu, (2)} \eta_3^{1, (2)} \eta_3^{2, (2)} + \eta_4^{\mu, (2)} \eta_4^{\nu, (2)} \eta_4^{1, (2)} \eta_4^{2, (2)} \quad (482)$$

$$= \begin{cases} 4 & (\mu, \nu) = (1, 2) \text{ 又は } (2, 1) \\ 0 & \mu = \nu \end{cases} \quad (483)$$

$$= (\text{右辺})$$

よって式 (480) が成り立つ。

(ii) $p = m (\geq 2)$ のとき

このとき、式 (480) が成り立つと仮定する。

$$\sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\mu, (m)} \eta_l^{\nu, (m)} \eta_l^{1, (m)} \eta_l^{2, (m)} = \begin{cases} 2^m & (\mu, \nu) = (1, 2) \text{ 又は } (2, 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (484)$$

$p = m + 1$ でもこの式が成り立つことを証明する。

$$\sum_{l=1}^{2^{m+1}} \eta_l^{\mu, (m+1)} \eta_l^{\nu, (m+1)} \eta_l^{1, (m+1)} \eta_l^{2, (m+1)} = \begin{cases} 2^{m+1} & (\mu, \nu) = (1, 2) \text{ 又は } (2, 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (485)$$

を示す。 μ, ν に 1 を含む場合 (サブラティスの表の一番左の列) と、含まない場合の二通り考える必要がある。

(ア) μ, ν に 1 を含まない場合

$\eta_l^{\tau, (m+1)}$ ($\tau \neq 1, l = 1 \sim 2^m$) は、一つ前のパターン $\eta_l^{\tau-1, (m)}$ と一致する。式 (485) の左辺の $\eta_l^{\mu, (m+1)}$ と $\eta_l^{\nu, (m+1)}$ で、 $l = 2^m + 1 \sim 2^{m+1}$ は条件式 (459) を各々用いて符号を反転させたもの。従って式 (485) の左辺は、式 (459) を用いて、

$$(485) \text{ の左辺} = 2 \sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\mu, (m+1)} \eta_l^{\nu, (m+1)} \eta_l^{1, (m+1)} \eta_l^{2, (m+1)} \quad (486)$$

$\eta_l^{1,(m+1)} = 1, \eta_l^{2,(m+1)} = \eta_l^{1,(m)}$ となるので、

$$= 2 \sum_{l=1}^{2^m} \eta_l^{\mu-1,(m)} \eta_l^{\nu-1,(m)} \eta_l^{1,(m)} \quad (487)$$

更に対称性を用いて和を分解する。式 (459) より、

$$= 2 \left[\sum_{l=1}^{2^{m-1}} \eta_l^{\mu-1,(m)} \eta_l^{\nu-1,(m)} \eta_l^{1,(m)} + \sum_{l=2^{m-1}+1}^{2^m} \eta_l^{\mu-1,(m)} \eta_l^{\nu-1,(m)} \eta_l^{1,(m)} \right] \quad (488)$$

$$= 2 \left[\sum_{l=1}^{2^{m-1}} \eta_l^{\mu-1,(m)} \eta_l^{\nu-1,(m)} \eta_l^{1,(m)} - \sum_{l=1}^{2^{m-1}} \eta_l^{\mu-1,(m)} \eta_l^{\nu-1,(m)} \eta_l^{1,(m)} \right] \quad (489)$$

$$= 0 \quad (490)$$

(485) の右辺と等しくなり、証明できた。

(イ) μ, ν に 1 を含む場合

$\mu = 1$ とする。すなわち、

$$(485) \text{ の左辺} = \sum_{l=1}^{2^{m+1}} \eta_l^{1,(m+1)} \eta_l^{\nu,(m+1)} \eta_l^{1,(m+1)} \eta_l^{2,(m+1)} \quad (491)$$

$$= 1 \times \sum_{l=1}^{2^{m+1}} \eta_l^{\nu,(m+1)} \eta_l^{2,(m+1)} \quad (492)$$

ここで、前の章 4.4.1 で証明した式 (465) を用いると、 $\nu = 2$ であるときのみ 2^{m+1} であることがわかる。従って、

$$= \begin{cases} 2^{m+1} & (\mu, \nu) = (1, 2) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (493)$$

これは、 $\nu = 1$ としても同様に、 μ と ν を入れ替えたものになる。よって (i), (ii) より、式 (480) が証明できた。

7.4 連続解が存在する R_{1R} の範囲

連続解の時、

$$R_{1I} = 0, R_{2R} = R_{3R} = \frac{a'}{R_{1R}} \quad (494)$$

$$a' = \frac{x_1^2 - x_2^2}{8(\beta J)^2}, R^2 = \frac{x_1^2 + 3x_2^2}{4(\beta J)^2} \quad (495)$$

$$a' = b' = c' = R_{2R}^2 + R_{2I}R_{3I} \quad (496)$$

また $R^2 = R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 + R_{2I}^2 + R_{3I}^2$ より、 R_{2I}^2, R_{3I}^2 は和が $R^2 - R_{1R}^2 - 2R_{2R}^2$ 、積が $(R_{2R}^2 - a')^2$ となるので、次の2次方程式の解となっている。

$$t^2 + (R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2)t + (a' - R_{2R}^2)^2 = 0 \quad (497)$$

$\tilde{b} = R_{1R}^2 + 2R_{2R}^2 - R^2$, $\tilde{c} = (a' - R_{2R}^2)^2$ とすると、方程式の解は

$$t = \frac{-\tilde{b} \pm \sqrt{\tilde{b}^2 - 4\tilde{c}}}{2} \quad (498)$$

R_{2I}^2 と R_{3I}^2 は同じ式を満たすので、 $R_{2I}^2 \geq R_{3I}^2$ を仮定して、

$$R_{2I}^2 = \frac{-\tilde{b} + \sqrt{\tilde{b}^2 - 4\tilde{c}}}{2} \quad (499)$$

$$R_{3I}^2 = \frac{-\tilde{b} - \sqrt{\tilde{b}^2 - 4\tilde{c}}}{2} \quad (500)$$

このとき $\tilde{c} = (a' - R_{2R}^2)^2 \geq 0$ がわかる。 R_{2I} は実数であり、負ではないので、 $\tilde{b}^2 - 4\tilde{c} > 0$ 、また $\tilde{b} < 0$ を満たすべきである。まず、次のような関係が成り立つ R_{1R} の範囲を調べる。

$$\tilde{b}^2 - 4\tilde{c} = R_{1R}^4 + R^4 + 4R_{1R}^2R_{2R}^2 - 4R_{2R}^2R^2 - 2R_{1R}^2R^2 - 4a'^2 + 8a'R_{2R}^2 \geq 0 \quad (501)$$

$R_{2R} = \frac{a'}{R_{1R}}$ である。 R_{1R}^2 を掛けて、新たに $y = R_{1R}^2$ とすると

$$y^3 - 2R^2y^2 + R^4y + 8a'^3 - 4a'^2R^2 \geq 0 \quad (502)$$

$R^2 = \frac{\Xi_1^2 + 3\Xi_2^2}{4}$, $a' = \frac{\Xi_1^2 - \Xi_2^2}{8}$ を代入する。

$$y^3 - \frac{1}{2}(\Xi_1^2 + 3\Xi_2^2)y^2 + \frac{1}{16}(\Xi_1^2 + 3\Xi_2^2)^2y + \frac{1}{64}(\Xi_1^2 - \Xi_2^2)^3 - \frac{1}{64}(\Xi_1^2 - \Xi_2^2)^2(\Xi_1^2 + 3\Xi_2^2) \geq 0 \quad (503)$$

$A = \Xi_1^2 + 3\Xi_2^2$, $B = \Xi_1^2 - \Xi_2^2$ とすると、

$$y^3 - \frac{1}{2}Ay^2 + \frac{1}{16}A^2y + \frac{1}{64}(B^3 - AB^2) \geq 0 \quad (504)$$

$$(y - \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B)\{y^2 - \frac{1}{4}(A+B)y + \frac{1}{16}B^2\} \geq 0 \quad (505)$$

$$\begin{aligned} & \{y - \frac{1}{4}(A-B)\}\{y - \frac{(A+B) + \sqrt{(A+3B)(A-B)}}{8}\} \\ & \times \{y - \frac{(A+B) - \sqrt{(A+3B)(A-B)}}{8}\} \geq 0 \quad (506) \end{aligned}$$

A, B を再び Ξ_l の式で表す。

$$A - B = \Xi_1^2 + 3\Xi_2^2 - (\Xi_1^2 - \Xi_2^2) = 4\Xi_2^2 \quad (507)$$

$$A + B = 2\Xi_1^2 + 2\Xi_2^2 = 2(\Xi_1^2 + \Xi_2^2) \quad (508)$$

$$A + 3B = \Xi_1^2 + 3\Xi_2^2 + 3(\Xi_1^2 - \Xi_2^2) = 4\Xi_1^2 \quad (509)$$

これらを式 (506) に代入すると、

$$(y - \Xi_2^2) \left\{ y - \frac{1}{4}(\Xi_1 + \Xi_2)^2 \right\} \left\{ y - \frac{1}{4}(\Xi_1 - \Xi_2)^2 \right\} \geq 0 \quad (510)$$

以上から、この式の3つの解を求めることが出来た。次に、この式の極値を調べる。式 (504) より、以下のような関数 f を考える。

$$f = y^3 - \frac{1}{2}Ay^2 + \frac{1}{16}A^2y + \frac{1}{64}(B^3 - AB^2) \quad (511)$$

$$(512)$$

一階微分は、

$$f' = 3y^2 - Ay + \frac{1}{16}A^2 = 3\left(y - \frac{1}{4}A\right)\left(y - \frac{1}{12}A\right) \quad (513)$$

よって極値は $y = \frac{1}{4}A, \frac{1}{12}A$ 。ちなみに、 $R^2 = \frac{1}{4}A$ である。

(i) $y = \frac{1}{4}A$ のとき

$$f = -\frac{1}{16}(\Xi_1^2 - \Xi_2^2)^2 \Xi_2^2 \quad (514)$$

(ii) $y = \frac{1}{12}A$ のとき

$$f = \frac{1}{3(12)^2} \Xi_1^2 (\Xi_1^2 - 9\Xi_2^2)^2 \geq 0 \quad (515)$$

$f = 0$ を満たす3点は、

$$y = \Xi_2^2 \quad (516)$$

$$y = \frac{1}{4}(\Xi_1 + \Xi_2)^2 \quad (517)$$

$$y = \frac{1}{4}(\Xi_1 - \Xi_2)^2 \quad (518)$$

この3つの解の大小関係を調べる。いま、 Ξ_l の大小関係は、 $\Xi_1 > \Xi_2 > 0$ であることが分かっているので、 $\frac{\Xi_1 + \Xi_2}{2} > \Xi_2$ 、 $\frac{\Xi_1 + \Xi_2}{2} > \frac{\Xi_1 - \Xi_2}{2} > 0$ が得られる。以上から、グラフ f の形は図 44 のようになる。

従って、 $f \geq 0$ となる R_{1R} の範囲は、

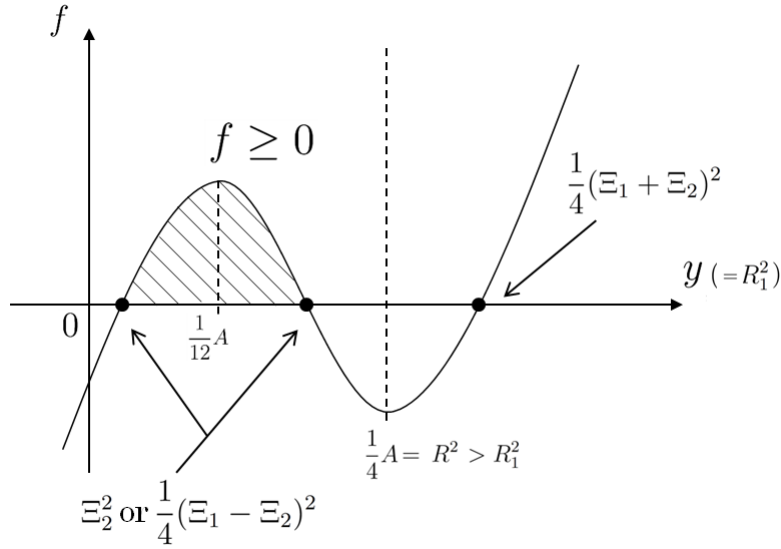


図 44: 関数 f

(i) $\Xi_1 > 3\Xi_2$

$$\Xi_2 \leq R_{1R} \leq \frac{1}{2}(\Xi_1 - \Xi_2) \quad (519)$$

(ii) $\Xi_1 < 3\Xi_2$

$$\frac{1}{2}(\Xi_1 - \Xi_2) \leq R_{1R} \leq \Xi_2 \quad (520)$$

ここで、 $\tilde{b} \leq 0$ が成り立つ領域を調べる。関数 $g(y)$ を以下のように定義する。

$$g(y) = R_{1R}^2 \tilde{b} = y^2 - R^2 y + 2a'^2 \quad (521)$$

$$= y^2 - \frac{1}{4}(\Xi_1^2 + 3\Xi_2^2)y + \frac{1}{32}(\Xi_1^2 - \Xi_2^2)^2 \quad (522)$$

$g(y)$ における $y = \Xi_2^2$ と $\frac{1}{4}(\Xi_1 - \Xi_2)^2$ の値は、

$$g(\Xi_2^2) = \frac{1}{32}(\Xi_1^2 - \Xi_2^2)(\Xi_1^2 - 9\Xi_2^2), \quad (523)$$

$$g\left(\frac{1}{4}(\Xi_1 - \Xi_2)^2\right) = \frac{1}{32}(\Xi_1 - \Xi_2)^2(\Xi_1 - 3\Xi_2)(\Xi_1 + \Xi_2). \quad (524)$$

従って、 $\tilde{b} \leq 0$ のための必要十分条件は $\Xi_1 \leq 3\Xi_2$ となる。

次に、 R_{1R} , R_{2R} , R_{3R} の大小関係を調べる。連続解が現れる R_{1R} の範囲は、

$$R^- \leq R_{1R} \leq R^+ \quad (525)$$

$$R^- = \frac{\Xi_1 - \Xi_2}{2} \quad (526)$$

$$R^+ = \Xi_2 \quad (527)$$

R_{1R} と R_{2R} の大小関係を比較する。

$$R_{1R} - R_{2R} = \frac{1}{R_{1R}} \left(R_{1R}^2 - \frac{\Xi_1^2 - \Xi_2^2}{8} \right) \quad (528)$$

$\Xi_1 \leq 3\Xi_2$ であるので、 R_{1R} は最小値 $\frac{1}{2}(\Xi_1 - \Xi_2)$ をとる。

$$\left(R_{1R}^2 - \frac{\Xi_1^2 - \Xi_2^2}{8} \right)_{min} = \frac{1}{8}(\Xi_1 - \Xi_2)(\Xi_1 - 3\Xi_2) \leq 0 \quad (529)$$

よって $R_{1R} \leq R_{2R}$ 。一方、 R_{1R} が最大値 Ξ_2 をとるとき、

$$\left(R_{1R}^2 - \frac{\Xi_1^2 - \Xi_2^2}{8} \right)_{max} = \frac{1}{8}(3\Xi_2 + \Xi_1)(3\Xi_2 - \Xi_1) \geq 0 \quad (530)$$

よって $R_{1R} \geq R_{2R}$ 。

$\Xi_1 = 3\Xi_2$ のとき、 $R_{1R} = R_{2R} = R_{3R} = \Xi_2$ 、また $R_{1I} = R_{2I} = R_{3I} = 0$ であり、これは連続解ではなく対称混合解 S_4 に縮退している。以上の結果から、 R_{1R} の範囲内で R_{1R} と R_{2R} の大小関係が変わるということは、連続解である限り $R_{1R} = R_{2R} = R_{3R}$ となるときがあることがわかる。

7.5 その他の解の安定性

ここでは、連続解以外の解におけるヘッセ行列の計算をし、各解の安定性について調べる。

ヘッセ行列の各成分は以下の式で決まる。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu R}} = JN \left(\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} - (\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2^p} P_l u_l X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{lR})^2 \right) \quad (531)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu I} \partial R_{\nu I}} = JN \left(\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} - (\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2^p} P_l u_l X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{lI})^2 \right) \quad (532)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R_{\mu R} \partial R_{\nu I}} = JN \left(-(\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2^p} P_l u_l X_l \eta_l^\mu \eta_l^\nu \zeta_{lR} \zeta_{lI} \right) \quad (533)$$

7.5.1 $p = 2$ のとき

7.5.1.1 連続解の安定性

本編を参照。

7.5.1.2 記憶パターンの安定性

記憶パターンが存在するのは $a = 0$ のときのみ。回転対称性から $R_{1I} = 0$ を仮定する。このとき、

$$R_{2R} = R_{2I} = 0 \quad (534)$$

記憶パターンのときの u_i, R の値

$$x_1 = x_2 \quad (535)$$

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{\beta J} \quad (536)$$

$$R = \frac{x_1}{\beta J} \quad (537)$$

解が存在するのは $u_1 \leq \frac{1}{2}$ のとき。つまり $\frac{1}{\beta J} \leq \frac{1}{2}$ 。よって、

$$T_c = \frac{J}{2} \quad (538)$$

ζ_{iR}, ζ_{iI} の値

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + R_{2R} = R_{1R} \quad (539)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} - R_{2R} = R_{1R} \quad (540)$$

$$\zeta_{1I} = R_{1I} + R_{2I} = 0 \quad (541)$$

$$\zeta_{2I} = R_{1I} - R_{2I} = 0 \quad (542)$$

記憶パターンのときの $c_{\mu\mu}, c_{\mu\nu}, P_l u_l$ の値

$$c_{\mu\mu} = \frac{1}{\beta J} \quad (543)$$

$$c_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (544)$$

$$P_l u_l = \frac{1}{2^p \beta J} \quad (545)$$

$$\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (546)$$

以上よりヘッセ行列 \mathcal{H} は、式 (531) ~ (533) より、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1R1R} &= -\frac{1}{2} J N (\beta J)^2 (\zeta_{1R})^2 (X_1 + X_2) \\ &= -J N (\beta J)^2 (\zeta_{1R})^2 X_1 = \mathcal{H}_{2R2R} \equiv A \end{aligned} \quad (547)$$

$$\mathcal{H}_{1R2R} = \mathcal{H}_{2R1R} = 0 \quad (548)$$

$$\mathcal{H}_{1I1I} = \mathcal{H}_{2I2I} = \mathcal{H}_{1I2I} = \mathcal{H}_{2I1I} = 0 \quad (549)$$

$$\mathcal{H}_{1R1I} = \mathcal{H}_{2R2I} = \mathcal{H}_{1R2I} = \mathcal{H}_{2R1I} = 0 \quad (550)$$

行列要素の並べ方を $1R, 2R, 1I, 2I$ として当てはめると、

$$\mathcal{H} = \begin{matrix} & 1R & 2R & 1I & 2I \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 1I \\ 2I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (551)$$

この行列の固有値は、

$$\lambda = 0(\text{重複度 } 2), A(\text{重複度 } 2)$$

の4つである。この正負を確認する。

$$A = -JN(\beta J)^2(\zeta_{1R})^2 X_1 \quad (552)$$

$J, N > 0, X_1 < 0$ であるので、これは正。よって記憶パターンのときのヘッセ行列の固有値は、0が2つ、正が2つ。

記憶パターンのとき、変数は R_1 のみであると考えることができる。ヘッセ行列の固有値は、0が2つ、正が2つ。自由エネルギーの極小値の中にあり、安定となる。この結果は、連続解のときと同じであり、記憶パターンは連続解の端であることから、妥当であると考えられる。

7.5.1.3 対称混合解 S_1 の安定性

回転対称性から $R_{1I} = 0$ を仮定する。このとき、以下が求まる。

$$R_{1R} = R_{2R}, R_{2I} = 0 \quad (553)$$

対称混合解のときの u_1, R_{1R}, R_{1I}, R の値

$$u_1 = \frac{1}{(1+a)\beta J}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \quad (554)$$

$$R_{1R} = \frac{x_1}{2\beta J} = R_{2R} \quad (555)$$

$$R = \frac{x_1}{\sqrt{2}\beta J} \quad (556)$$

解が存在するのは $u_1 \leq \frac{1}{2}$ のとき。つまり $\frac{1}{(1+a)\beta J} \leq \frac{1}{2}$ 。よって、

$$T_c = \frac{(1+a)J}{2} \quad (557)$$

ζ_{1R}, ζ_{1I} の値

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + R_{2R} = 2R_{1R} \quad (558)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} - R_{2R} = 0 \quad (559)$$

$$\zeta_{1I} = R_{1I} + R_{2I} = 0 \quad (560)$$

$$\zeta_{2I} = R_{1I} - R_{2I} = 0 \quad (561)$$

対称混合解のときの $c_{\mu\mu}, c_{\mu\nu}$ の値

$$c_{\mu\mu} = \frac{1}{2\beta J} + \frac{1-a}{4} \quad (562)$$

$$c_{\mu\nu} = \frac{1}{2\beta J} - \frac{1-a}{4} \quad (\mu \neq \nu) \quad (563)$$

$$\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1-a}{4}\beta J & (\mu = \nu) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1-a}{4}\beta J & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (564)$$

ここで、 $JN(\frac{1}{2} - \frac{1-a}{4}\beta J) \equiv \gamma$ とおく。以上からヘッセ行列 \mathcal{H} は、式 (531) ~ (533) より、

$$\mathcal{H}_{1R1R} = \gamma - 2JN(\beta J)^2 X_1 R_{1R}^2 = \mathcal{H}_{2R2R} \equiv A \quad (565)$$

$$\mathcal{H}_{1R2R} = -\gamma - 2JN(\beta J)^2 X_1 R_{1R}^2 = \mathcal{H}_{2R1R} = A - 2\gamma \quad (566)$$

$$\mathcal{H}_{1I1I} = \mathcal{H}_{2I2I} = \gamma \quad (567)$$

$$\mathcal{H}_{1I2I} = \mathcal{H}_{2I1I} = -\gamma \quad (568)$$

$$\mathcal{H}_{1R1I} = \mathcal{H}_{2R2I} = \mathcal{H}_{1R2I} = \mathcal{H}_{2R1I} = 0 \quad (569)$$

行列要素の並べ方を $1R, 2R, 1I, 2I$ として当てはめると、

$$\mathcal{H} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 2R & 1I & 2I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 1I \\ 2I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & A-2\gamma & 0 & 0 \\ A-2\gamma & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (570)$$

この行列の固有値を求める。

$$|\mathcal{H} - \lambda E| = \begin{vmatrix} A - \lambda & A - 2\gamma & 0 & 0 \\ A - 2\gamma & A - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \lambda & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & \gamma - \lambda \end{vmatrix} \quad (571)$$

$$= \begin{vmatrix} A - \lambda & A - 2\gamma \\ A - 2\gamma & A - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma - \lambda & -\gamma \\ -\gamma & \gamma - \lambda \end{vmatrix} \quad (572)$$

$$= (2A - 2\gamma - \lambda)(2\gamma - \lambda)^2(-\lambda) = 0 \quad (573)$$

以上より固有値は、

$$\lambda = 0, 2(A - \gamma), 2\gamma(\text{重複度 } 2)$$

の4つである。これらの正負を確認する。

$$2(A - \gamma) = -2JN(\beta J)^2 X_1 R_{1R}^2 \quad (574)$$

$X_1 < 0$ より、この固有値は正。

$$2\gamma = 2JN\left(\frac{1}{2} - \frac{1-a}{4}\beta J\right) \quad (575)$$

これが正であれば解は安定と言える。 $\beta = \frac{1}{T}$ なので、

$$\frac{1}{2} - \frac{1-a}{4}\beta J > 0 \quad (576)$$

$$T > \frac{(1-a)J}{2} \quad (577)$$

以上から対称混合解 S_1 は、 $T > \frac{(1-a)J}{2}$ のときに安定である。

7.5.1.4 対称混合解 S_2 の安定性

回転対称性から $R_{1I} = 0$ を仮定する。このとき、以下が求まる。

$$R_{1R} = -R_{2R}, R_{2I} = 0 \quad (578)$$

対称混合解のときの u_I, R_{1R}, R_{1I}, R の値

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (579)$$

$$R_{1R} = \frac{x_1}{2\beta J} = -R_{2R} \quad (580)$$

$$R = \frac{x_1}{\sqrt{2}\beta J} \quad (581)$$

これより

$$T_c = \frac{(1-a)J}{2} \quad (582)$$

ζ_{1R}, ζ_{1I} の値

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + R_{2R} = 0 \quad (583)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} - R_{2R} = 2R_{1R} \quad (584)$$

$$\zeta_{1I} = R_{1I} + R_{2I} = 0 \quad (585)$$

$$\zeta_{2I} = R_{1I} - R_{2I} = 0 \quad (586)$$

対称混合解のときの $c_{\mu\mu}, c_{\mu\nu}$ の値

$$c_{\mu\mu} = \frac{1}{2\beta J} - \frac{1+a}{4} \quad (587)$$

$$c_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\beta J} + \frac{1+a}{4} \quad (\mu \neq \nu) \quad (588)$$

$$\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1+a}{4}\beta J & (\mu = \nu) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1+a}{4}\beta J & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (589)$$

ここで、 $JN(\frac{1}{2} - \frac{1+a}{4}\beta J) \equiv \gamma$ とおく。以上からヘッセ行列 \mathcal{H} は、式 (531) ~ (533) より、

$$\mathcal{H}_{1R1R} = \gamma - 2JN(\beta J)^2 X_2 R_{1R}^2 = \mathcal{H}_{2R2R} \equiv A \quad (590)$$

$$\mathcal{H}_{1R2R} = -\gamma + 2JN(\beta J)^2 X_2 R_{1R}^2 = \mathcal{H}_{2R1R} = -A \quad (591)$$

$$\mathcal{H}_{1I1I} = \mathcal{H}_{2I2I} = \gamma \quad (592)$$

$$\mathcal{H}_{1I2I} = \mathcal{H}_{2I1I} = -\gamma \quad (593)$$

$$\mathcal{H}_{1R1I} = \mathcal{H}_{2R2I} = \mathcal{H}_{1R2I} = \mathcal{H}_{2R1I} = 0 \quad (594)$$

行列要素の並べ方を $1R, 2R, 1I, 2I$ として当てはめると、

$$\mathcal{H} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 2R & 1I & 2I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 1I \\ 2I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & -A & 0 & 0 \\ -A & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (595)$$

この行列の固有値を求める。

$$|\mathcal{H} - \lambda E| = \begin{vmatrix} A - \lambda & -A & 0 & 0 \\ -A & A - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \lambda & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & \gamma - \lambda \end{vmatrix} \quad (596)$$

$$= \begin{vmatrix} A - \lambda & -A \\ -A & A - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma - \lambda & -\gamma \\ -\gamma & \gamma - \lambda \end{vmatrix} \quad (597)$$

$$= (2A - \lambda)(2\gamma - \lambda)(-\lambda)^2 = 0 \quad (598)$$

以上より固有値は、

$$\lambda = 0(\text{重複度 } 2), 2A, 2\gamma$$

の4つである。これらの正負を確認する。

$$2\gamma = 2JN\left(\frac{1}{2} - \frac{1+a}{4}\beta J\right) \quad (599)$$

これが正であれば解は安定と言える。 $\beta = \frac{1}{T}$ なので、

$$\frac{1}{2} - \frac{1+a}{4}\beta J > 0 \quad (600)$$

$$T > \frac{(1+a)J}{2} \quad (601)$$

しかし対称混合解 S_2 のとき、解の存在条件は $T < \frac{(1-a)J}{2}$ 。従って対称混合解 S_2 は、不安定である。

7.5.2 $p = 3$ のとき

7.5.2.1 連続解の安定性

本編を参照。

7.5.2.2 記憶パターンの安定性

記憶パターンが存在するのは $a = 0$ のときのみ。回転対称性から $R_{1I} = 0$ を仮定する。このとき、

$$R_{2R} = R_{2I} = R_{3R} = R_{3I} = 0 \quad (602)$$

記憶パターンのときの u_i, R の値

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \quad (603)$$

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{\beta J} \quad (604)$$

$$R = \frac{x_1}{\beta J} \quad (605)$$

式 (604) より、

$$T_c = \frac{J}{2} \quad (606)$$

ζ_{iR}, ζ_{iI} の値

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + R_{2R} + R_{3R} = R_{1R} \quad (607)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} + R_{2R} - R_{3R} = R_{1R} \quad (608)$$

$$\zeta_{3R} = R_{1R} - R_{2R} - R_{3R} = R_{1R} \quad (609)$$

$$\zeta_{4R} = R_{1R} - R_{2R} + R_{3R} = R_{1R} \quad (610)$$

$$\zeta_{1I} = \zeta_{2I} = \zeta_{3I} = \zeta_{4I} = 0 \quad (611)$$

記憶パターンのときの $c_{\mu\mu}, c_{\mu\nu}, P_l u_l$ の値

$$c_{\mu\mu} = \frac{1}{\beta J} \quad (612)$$

$$c_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (613)$$

$$P_l u_l = \frac{1}{2^p \beta J} \quad (614)$$

$$\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (615)$$

以上よりヘッセ行列 \mathcal{H} は、式 (531) ~ (533)、また $X_l = \frac{u'(x_l)}{x_l u(x_l)} = X_1$ より、

$$\mathcal{H}_{1R1R} = -JN(\beta J)^2 R_{1R}^2 X_1 = \mathcal{H}_{2R2R} = \mathcal{H}_{3R3R} \equiv A \quad (616)$$

$$\mathcal{H}_{1R2R} = -\frac{1}{4} JN(\beta J)^2 R_{1R}^2 \{X_1 + X_2 - X_3 - X_4\} \quad (617)$$

$$= \mathcal{H}_{2R1R} = 0 \quad (618)$$

$$\mathcal{H}_{1R3R} = -\frac{1}{4} JN(\beta J)^2 R_{1R}^2 \{X_1 - X_2 - X_3 + X_4\} \quad (619)$$

$$= \mathcal{H}_{3R1R} = 0 \quad (620)$$

$$\mathcal{H}_{2R3R} = -\frac{1}{4} JN(\beta J)^2 R_{1R}^2 \{X_1 - X_2 + X_3 - X_4\} \quad (621)$$

$$= \mathcal{H}_{3R2R} = 0 \quad (622)$$

$$\mathcal{H}_{1I1I} = \mathcal{H}_{2I2I} = \mathcal{H}_{3I3I} = \mathcal{H}_{1I2I} = \mathcal{H}_{2I1I} = \mathcal{H}_{1I3I} = \mathcal{H}_{3I1I} = \mathcal{H}_{2I3I} = \mathcal{H}_{3I2I} = 0 \quad (623)$$

$$\mathcal{H}_{1R1I} = \mathcal{H}_{2R2I} = \mathcal{H}_{3R3I} = \mathcal{H}_{1R2I} = \mathcal{H}_{2R1I} = \mathcal{H}_{1R3I} = \mathcal{H}_{3R1I} = \mathcal{H}_{2R3I} = \mathcal{H}_{3R2I} = 0 \quad (624)$$

行列要素の並べ方を $1R, 2R, 3R, 1I, 2I, 3I$ として当てはめると、

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 2R & 3R & 1I & 2I & 3I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 3R \\ 1I \\ 2I \\ 3I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (625)$$

この行列の固有値は、

$$\lambda = A(\text{重複度 } 3), 0(\text{重複度 } 3)$$

の6つである。Aの正負を確認する。 $X_l < 0$ であることから、

$$A = -JN(\beta J)^2 R_1^2 X_1 > 0 \quad (626)$$

記憶パターンするとき、変数は R_1 のみであると考えられる。ヘッセ行列の固有値は、0が3つ、正が3つ。自由エネルギーの極中であり、安定となる。この結果は、連続解のときと同じであり、記憶パターンは連続解の端であることから、妥当であると考えられる。

7.5.2.3 対称混合解 S_3 の安定性

回転対称性から $R_{1I} = 0$ を仮定する。このとき、式(381)、(409)から以下が得られる。

$$R_{2R} = R_{3R}, R_{2I} = -R_{3I} \quad (627)$$

対称混合解のときの u_l, R_{lR}, R_{lI}, R の値は、

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{(1-a)\beta J} \quad (628)$$

よって $x_1 = 0$ 。

$$R_{1R}^2 = \frac{1}{4}\Xi_2^2, R_{2R}^2 = \frac{1}{16}\Xi_2^2 = R_{3R}^2 \quad (629)$$

$$R_{2I}^2 = \frac{3}{16}\Xi_2^2 = R_{3I}^2 \quad (630)$$

$$R^2 = \frac{3}{4}\Xi_2^2 \quad (631)$$

$$T_c = \frac{(1-a)J}{2} \quad (632)$$

となる。ここで $R_{1R} > 0$ を仮定すると、 $R_{1R} = \frac{1}{2}\Xi_2$ 。 $a' = R_{1R}R_{2R}$ で、式(421)より $a' = b' = c' < 0$ であるから、 $R_{2R} = R_{3R} < 0$ で、 $R_{2R} = -\frac{\Xi_2}{4}$ 。

ζ_{lR}, ζ_{lI} の値

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + 2R_{2R} = 0 \quad (633)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} = \frac{1}{2}\Xi_2 \quad (634)$$

$$\zeta_{3R} = R_{1R} - 2R_{2R} = \Xi_2 \quad (635)$$

$$\zeta_{4R} = R_{1R} = \frac{1}{2}\Xi_2 \quad (636)$$

$$\zeta_{1I} = 0 \quad (637)$$

$$\zeta_{2I} = 2R_{2I} \quad (638)$$

$$\zeta_{3I} = 0 \quad (639)$$

$$\zeta_{4I} = -2R_{2I} \quad (640)$$

対称混合解のときの $c_{\mu\mu}, c_{\mu\nu}$ の値

$$c_{\mu\mu} = \frac{3}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} \quad (641)$$

$$c_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} \quad (\mu \neq \nu) \quad (642)$$

$$\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J & (\mu = \nu) \\ \frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (643)$$

ここで、 $\gamma \equiv JN(\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J)$ とおく。以上よりヘッセ行列 \mathcal{H} は、式 (531) ~ (533) より、

$$\mathcal{H}_{1R1R} = \gamma - \frac{3}{8}JN(\beta J)^2 X_2 \Xi_2^2 = \mathcal{H}_{2R2R} = \mathcal{H}_{3R3R} = 3A - 2\gamma \quad (644)$$

$$\mathcal{H}_{1R2R} = \gamma + \frac{1}{4}JN(\beta J)^2 X_2 \Xi_2^2 = \mathcal{H}_{1R3R} = -2A + 3\gamma \quad (645)$$

$$\mathcal{H}_{2R3R} = \gamma - \frac{1}{8}JN(\beta J)^2 X_2 \Xi_2^2 = \mathcal{H}_{3R2R} \equiv A \quad (646)$$

$$\mathcal{H}_{1I1I} = \gamma - \frac{3}{8}JN(\beta J)^2 X_2 \Xi_2^2 = \mathcal{H}_{2I2I} = \mathcal{H}_{3I3I} = 3A - 2\gamma \quad (647)$$

$$\mathcal{H}_{1I2I} = \mathcal{H}_{2I1I} = \mathcal{H}_{1I3I} = \mathcal{H}_{3I1I} = 0 \quad (648)$$

$$\mathcal{H}_{2I3I} = \gamma + \frac{3}{8}JN(\beta J)^2 X_2 \Xi_2^2 = \mathcal{H}_{3I2I} = -3A + 4\gamma \quad (649)$$

$$\mathcal{H}_{1R1I} = \mathcal{H}_{2R3I} = 0 \quad (650)$$

$$\mathcal{H}_{1R2I} = -\frac{1}{2}JN(\beta J)^2 \zeta_{2R} \zeta_{2I} \equiv B \quad (651)$$

$$\mathcal{H}_{1R3I} = \frac{1}{2}JN(\beta J)^2 \zeta_{2R} \zeta_{2I} = -B \quad (652)$$

行列要素の並べ方を $1R, 2R, 3R, 1I, 2I, 3I$ として当てはめると、

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 2R & 3R & 1I & 2I & 3I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 3R \\ 1I \\ 2I \\ 3I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3A - 2\gamma & -2A + 3\gamma & -2A + 3\gamma & 0 & B & -B \\ -2A + 3\gamma & 3A - 2\gamma & A & B & 0 & 0 \\ -2A + 3\gamma & A & 3A - 2\gamma & -B & 0 & 0 \\ 0 & B & -B & 3A - 2\gamma & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 3A - 2\gamma & -3A + 4\gamma \\ -B & 0 & 0 & 0 & -3A + 4\gamma & 3A - 2\gamma \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (653)$$

この行列の固有値を求める。回転対称性から、 $1I$ の成分を 0 としてもよい。

$$|\mathcal{H} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3A - 2\gamma - \lambda & -2A + 3\gamma & -2A + 3\gamma & B & -B \\ -2A + 3\gamma & 3A - 2\gamma - \lambda & A & 0 & 0 \\ -2A + 3\gamma & A & 3A - 2\gamma - \lambda & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 3A - 2\gamma - \lambda & -3A + 4\gamma \\ -B & 0 & 0 & -3A + 4\gamma & 3A - 2\gamma - \lambda \end{vmatrix} \quad (654)$$

計算すると、

$$= -(2\gamma - \lambda)(4A - 4\gamma - 2\lambda) \begin{vmatrix} 3A - 2\gamma - \lambda & -2A + 3\gamma & 2B \\ -4A + 6\gamma & 4A - 2\gamma - \lambda & 0 \\ B & 0 & -6A + 6\gamma + \lambda \end{vmatrix} \quad (655)$$

この時点でわかる固有値は、

$$\lambda = 0, 2(A - \gamma), 2\gamma$$

これらの正負を確認する。

$$2\gamma = 2JN\left(\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J\right) \quad (656)$$

これが正であれば解は安定と言える。 $\beta = \frac{1}{T}$ なので、

$$\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J > 0 \quad (657)$$

$$T > \frac{(1-a)J}{2} \quad (658)$$

しかし対称混合解 S_3 のとき、解の存在条件は $T < \frac{(1-a)J}{2}$ 。従って対称混合解 S_3 は、不安定である。

7.5.2.4 対称混合解 S_4 の安定性

回転対称性から $R_{1I} = 0$ を仮定する。また、 $R_{2I} = R_{3I} = 0$ とする。このとき、 $R_1 = R_2 = R_3$ 。このとき $R_{1R} = R_{2R} = R_{3R} > 0$ 。ちなみに R_{1R}, R_{2R}, R_{3R} の内一つ以上の符号を反転させた場合は、存在しない。

対称混合解のときの u_l, R_{lR}, R_{lI}, R の値

$$u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{1-a} \left(\frac{4}{\beta J} - 3(1+3a)u_1 \right) \quad (659)$$

$$R_{1R} = \frac{x_1}{3\beta J} = \frac{x_2}{\beta J} = R_{2R} = R_{3R} \quad (660)$$

$$R = \frac{x_1}{\sqrt{3}\beta J} \quad (661)$$

x_1 は式 (432) より求まる。

ζ_{lR}, ζ_{lI} の値

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + R_{2R} + R_{3R} = 3R_{1R} \quad (662)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} + R_{2R} - R_{3R} = R_{1R} \quad (663)$$

$$\zeta_{3R} = R_{1R} - R_{2R} - R_{3R} = -R_{1R} \quad (664)$$

$$\zeta_{4R} = R_{1R} - R_{2R} + R_{3R} = R_{1R} \quad (665)$$

$$\zeta_{1I} = R_{1I} + R_{2I} + R_{3I} = 0 \quad (666)$$

$$\zeta_{2I} = R_{1I} + R_{2I} - R_{3I} = 0 \quad (667)$$

$$\zeta_{3I} = R_{1I} - R_{2I} - R_{3I} = 0 \quad (668)$$

$$\zeta_{4I} = R_{1I} - R_{2I} + R_{3I} = 0 \quad (669)$$

対称混合解のときの $c_{\mu\mu}, c_{\mu\nu}$ の値

定義式 (39) と式 (659) から、

$$c_{\mu\mu} = \frac{3}{\beta J} - 2(1 + 3a)u_1 \quad (670)$$

$$c_{\mu\nu} = -\frac{1}{\beta J} + (1 + 3a)u_1 \quad (\mu \neq \nu) \quad (671)$$

$$\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} = \begin{cases} -2 + 2(1 + 3a)\beta J u_1 & (\mu = \nu) \\ 1 - (1 + 3a)\beta J u_1 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (672)$$

また対称混合解 S_4 のとき、 $u_2 = u_3 = u_4, x_1 = 3x_2 = 3x_3 = 3x_4$ である。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1R1R} &= JN \left(-2 + 2(1 + 3a)\beta J u_1 - (\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2^p} P_l \frac{u'(x_l)}{x_l} \eta_l^\mu \eta_l^\nu (\zeta_{lR})^2 \right) \\ &= JN \left(-2 + 2(1 + 3a)\beta J u_1 - (\beta J)^3 2 \left\{ P_1 \frac{u'(x_1)}{x_1} \eta_1^1 \eta_1^1 (\zeta_{1R})^2 + P_2 \frac{u'(x_2)}{x_2} \eta_2^1 \eta_2^1 (\zeta_{2R})^2 \right\} \right) \\ &= 2JN \left(-1 + (1 + 3a)\beta J u_1 - (\beta J)^3 R_1^2 \left\{ \frac{1 + 3a}{8} \frac{u'(x_1)}{x_1} 9 + \frac{1 - a}{8} \frac{u'(x_2)}{x_2} 3 \right\} \right) \quad (673) \\ &= \mathcal{H}_{2R2R} \\ &\equiv A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1R2R} &= JN \left(1 - (1 + 3a)\beta J u_1 - (\beta J)^3 2 \left\{ P_1 \frac{u'(x_1)}{x_1} \eta_1^1 \eta_1^2 (\zeta_{1R})^2 + P_2 \frac{u'(x_2)}{x_2} \eta_2^1 \eta_2^2 (\zeta_{2R})^2 \right\} \right) \\
&= JN \left(1 - (1 + 3a)\beta J u_1 - 2(\beta J)^3 R_1^2 \left\{ \frac{1 + 3a}{8} \frac{u'(x_1)}{x_1} 9 - \frac{1 - a}{8} \frac{u'(x_2)}{x_2} 3 \right\} \right) \quad (674) \\
&= \mathcal{H}_{1R3R} = \mathcal{H}_{2R3R} \\
&\equiv B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1I1I} &= JN \left(-2 + 2(1 + 3a)\beta J u_1 - (\beta J)^3 2 \left\{ P_1 \frac{u'(x_1)}{x_1} \eta_1^1 \eta_1^1 (\zeta_{1I})^2 + P_2 \frac{u'(x_2)}{x_2} \eta_2^1 \eta_2^1 (\zeta_{2I})^2 \right\} \right) \\
&= JN \left(-2 + 2(1 + 3a)\beta J u_1 \right) \quad (675) \\
&= \mathcal{H}_{2I2I} = \mathcal{H}_{3I3I} \\
&\equiv C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1I2I} &= JN \left(1 - (1 + 3a)\beta J u_1 - (\beta J)^3 2 \left\{ P_1 \frac{u'(x_1)}{x_1} \eta_1^1 \eta_1^2 (\zeta_{1I})^2 + P_2 \frac{u'(x_2)}{x_2} \eta_2^1 \eta_2^2 (\zeta_{2I})^2 \right\} \right) \\
&= JN \left(1 - (1 + 3a)\beta J u_1 \right) \quad (676) \\
&= \mathcal{H}_{1I3I} = \mathcal{H}_{2I3I} \\
&\equiv D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1R1I} &= JN \left(-(\beta J)^3 \sum_{l=1}^{2p} P_l \frac{u'(x_l)}{x_l} \eta_l^\mu \eta_l^\nu \zeta_{lR} \zeta_{lI} \right) \\
&= 0 \quad (677) \\
&= \mathcal{H}_{2R2I} = \mathcal{H}_{3R3I} = \mathcal{H}_{1R2I} = \mathcal{H}_{1R3I} = \mathcal{H}_{2R3I}
\end{aligned}$$

行列要素の並べ方を $1R, 2R, 3R, 1I, 2I, 3I$ として当てはめると、

$$\mathcal{H} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 2R & 3R & 1I & 2I & 3I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 3R \\ 1I \\ 2I \\ 3I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & D & D \\ 0 & 0 & 0 & D & C & D \\ 0 & 0 & 0 & D & D & C \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (678)$$

この行列の固有値を求める。

$$|\mathcal{H} - \lambda E| = \begin{vmatrix} A - \lambda & B & B & & & \\ B & A - \lambda & B & & & \\ B & B & A - \lambda & & & \\ & & & C - \lambda & D & D \\ & & & D & C - \lambda & D \\ & & & D & D & C - \lambda \end{vmatrix} \quad (679)$$

$n \times n$ 行列のとき、対角成分 A とそれ以外が B となる行列の行列式は、

$$\{A - \lambda + (n - 1)B\}(A - \lambda - B)^{n-1} = 0 \quad (680)$$

同様に、

$$\{C - \lambda + (n - 1)D\}(C - \lambda - D)^{n-1} = 0 \quad (681)$$

今 $n = 3$ なので、以上から固有値は、

$$\lambda = A + 2B, A - B(\text{重複度 } 2), C + 2D, C - D(\text{重複度 } 2)$$

の6つである。これらの正負を確認する。

$$\begin{aligned} A + 2B &= 2JN \left(-1 + (1 + 3a)\beta Ju_1 - \frac{1}{8}(\beta J)^3 R_1^2 \left\{ (1 + 3a) \frac{u'(x_1)}{x_1} 9 + (1 - a) \frac{u'(x_2)}{x_2} 3 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 1 - (1 + 3a)\beta Ju_1 - \frac{2}{8}(\beta J)^3 R_1^2 \left\{ (1 + 3a) \frac{u'(x_1)}{x_1} 9 + (1 - a) \frac{u'(x_2)}{x_2} 3 \right\} \right) \\ &= -\frac{9}{4}JN(\beta J)^3 R_1^2 \left((1 + 3a) \frac{u'(x_1)}{x_1} 3 + (1 - a) \frac{u'(x_2)}{x_2} \right) \end{aligned} \quad (682)$$

$J, N > 0, x_l > 0, 0 \leq a \leq 1$ であり、 u_l は単調減少関数であるので、 $u'_l < 0$ となり、これは正。

$$\begin{aligned} C + 2D &= 2JN \{-1 + (1 + 3a)\beta Ju_1 + 1 - (1 + 3a)\beta Ju_1\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (683)$$

よって0固有値がひとつ存在することがわかる。

$$\begin{aligned} A - B &= JN \left(-2 + 2(1 + 3a)\beta Ju_1 - \frac{2}{8}(\beta J)^3 R_1^2 \left\{ (1 + 3a) \frac{u'(x_1)}{x_1} 9 + (1 - a) \frac{u'(x_2)}{x_2} 3 \right\} \right. \\ &\quad \left. - 1 + (1 + 3a)\beta Ju_1 + \frac{2}{8}(\beta J)^3 R_1^2 \left\{ (1 + 3a) \frac{u'(x_1)}{x_1} 9 + (1 - a) \frac{u'(x_2)}{x_2} 3 \right\} \right) \\ &= 3JN \left(-1 + (1 + 3a)\beta Ju_1 \right) \end{aligned} \quad (684)$$

$$= C - D \quad (685)$$

これが正であればよい。 $\beta = \frac{1}{T}$ なので、

$$-1 + (1 + 3a)\beta Ju_1 > 0 \quad (686)$$

$$T < (1 + 3a)Ju_1 \quad (687)$$

であればよい。書き換えると、

$$u_1 > \frac{1}{(1 + 3a)\beta J} = \frac{T}{(1 + 3a)J} \quad (688)$$

となる。対称混合解 S_4 のとき、臨界点 $T_c = \frac{(1+2a)J}{2}$ である。式 (688) の右辺を $y(T)$ とおく。

$$y(T) = \frac{T}{(1+3a)J} \quad (689)$$

式 (688) の左辺は、 $u_1 = u(x_1) = u(x_1(T))$ 。 $T = T_c$ では $x_1(T_c) = 0$ より $u_1 = \frac{1}{2}$ 。従って、

$$y(T_c) = \frac{1+2a}{2(1+3a)} < \frac{1}{2} \quad (690)$$

よって $T = T_c$ では $u(x_1(T_c)) > y(T_c)$ となり、式 (688) が成立。式 (432) から、 $x_1(T)$ は次式より決まる。

$$\frac{T}{J} = \frac{3}{4}(1+3a)u(x_1(T)) + \frac{1}{4}(1-a)u\left(\frac{x_1(T)}{3}\right) \quad (691)$$

これを T で微分して $x'_1(T)$ について解くと、

$$x'_1(T) = \frac{12}{\{9(1+3a)u'(x_1(T)) + (1-a)u'\left(\frac{x_1(T)}{3}\right)\}J} \quad (692)$$

$u' < 0$ なので、 $x'_1(T) < 0$ がわかる。ここで、 $g \equiv u(x_1(T)) - y(T)$ と定義すると、 $g(T_c) > 0$ である。

$$g' = u'(x_1(T))x'_1(T) - y'(T) \quad (693)$$

$$= \frac{12}{\{9(1+3a) + (1-a)\frac{u'\left(\frac{x_1(T)}{3}\right)}{u'(x_1(T))}\}J} - \frac{1}{(1+3a)J} \quad (694)$$

$T \rightarrow 0$ のときを考える。式 (690) より、左辺 $\rightarrow 0$ なので、 $u(x_1(T)) \rightarrow 0$ 。よって $g(T=0) = 0$ 。 $T \sim 0$ のとき、 $x \gg 1$ なので、 $u(x) \sim \frac{1}{x}$ となる。これを微分して、

$$u'(x) \simeq -\frac{1}{x^2} \quad (695)$$

であるので、

$$u'(x_1(T))x'_1(T) \sim \frac{12}{\{9(1+3a) + (1-a)\frac{x_1^2(T)}{\left(\frac{x_1}{3}\right)^2}\}J} \quad (696)$$

$$= \frac{2}{3(1+a)J} \quad (697)$$

従って、 $T \rightarrow 0$ のとき、

$$g'(T \rightarrow 0) = \frac{2}{3(1+a)J} - \frac{1}{(1+3a)J} \quad (698)$$

$$= \frac{3a-1}{3(1+a)(1+3a)J} \quad (699)$$

よって $3a-1 < 0$ のとき、 $g' < 0$ となることがわかる。

(ア) $a < \frac{1}{3}$ のとき

このとき $g'(0) < 0$ であり、 $g(0) = 0$ なので $0 < T \ll 1$ のとき、 $g(T) < 0$ 、 $g(T_c) > 0$ なので、 $g(T) = 0$ となる点がある。この温度を \tilde{T} で表す。すると $\tilde{T} > T$ で $g < 0$ 。また $\tilde{T} < T$ で $g > 0$ 。つまり $\tilde{T} < T < T_c$ で $u(x_1(T)) > y(T)$ となり、安定である。 \tilde{T} では $u(x_1(\tilde{T})) = \frac{\tilde{T}}{(1+3a)J}$ となっているが、これは連続解の u_1 の満たす式そのものである。又、対称混合解 S_4 では $T = \tilde{T}$ のとき、式 (431) から

$$u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{1-a} \left(\frac{4\tilde{T}}{J} - 3(1+3a)u_1 \right) \quad (700)$$

$$= \frac{\tilde{T}}{(1-a)J} \quad (701)$$

となり、これは連続解の $u_2 = u_3 = u_4$ が満たすべき式である。しかも、このとき S_4 では $x_1 = 3x_2$ であるから、 $T = \tilde{T}$ は連続解の臨界点 T_c と一致する。つまり S_4 と連続解は共存せず、連続解がなくなるとき S_4 が安定化する。また、 $g(T) = 0$ となる T は \tilde{T} のみであることがわかる。

(イ) $a > \frac{1}{3}$ のとき

このとき、 $g'(0) > 0$ であり、 $g(0) = 0$ なので、 $0 < T \ll 1$ のとき $g(T) > 0$ 。また $g(T_c) > 0$ 。なので、常に $g > 0$ が予想される。このときは $T < T_c$ で $u(x_1(T)) > y(T)$ となり、常に安定である。もし、 $g = 0$ なる温度があるとすると、(ア) の議論より、連続解が存在し、その臨界点 T_c と一致する。ところが $a > \frac{1}{3}$ では、連続解は存在しないので矛盾。よって常に $g > 0$ となる。

(ア)、(イ) それぞれの場合における関数 $g(T)$ のグラフを図 45 に示す。以上より、 S_4 の安定領域を示すことができた。

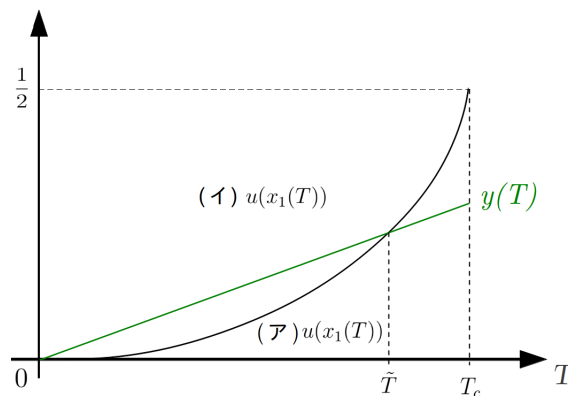


図 45: 関数 $u(x_1(T))$, $y(T)$ のグラフ

7.5.2.5 非対称混合解 A_1 の安定性

回転対称性から $R_{1I} = 0$ を仮定する。このとき、式 (326) より

$$R_{2I} = R_{3I} \quad (702)$$

となる。

非対称混合解のときの $u_I, R_{1R}, R_{2R}, R_{3R}$ の値

$$u_1 = \frac{1}{(1+3a)\beta J}, \quad u_2 = u_3 = \frac{1}{(1-a)\beta J}, \quad u_4 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 0 \quad (703)$$

$$R_{1R}^2 = \frac{1}{4}\Xi_2^2, \quad R_{2R}^2 = \frac{1}{16}\frac{\Xi_1^4}{\Xi_2^2}, \quad R_{3R}^2 = \frac{1}{16\Xi_2^2}(\Xi_1^2 - 2\Xi_2^2)^2 \quad (704)$$

$$R_{2I}^2 = \frac{\Xi_1^2}{16\Xi_2^2}(4\Xi_2^2 - \Xi_1^2) = R_{3I}^2 \quad (705)$$

$$R^2 = \frac{1}{4}(\Xi_1^2 + 2\Xi_2^2) \quad (706)$$

ここで $R_{1R} > 0$ を仮定する。 $a' = R_{1R}R_{2R}$ であり $a' = c' = \frac{1}{8}\Xi_1^2 > 0$ より、 $R_{2R} > 0$ 。また、 $R_{2I}^2 > 0$ より、

$$(2\Xi_2 + \Xi_1)(2\Xi_2 - \Xi_1) > 0 \quad (707)$$

$$\Xi_1 < 2\Xi_2 \quad (708)$$

という条件がわかる。これを踏まえ、 $R_{2R}R_{3R}$ の正負を考える。 c' の定義式と $c' = \frac{1}{8}\Xi_1^2$ より、

$$R_{2R}R_{3R} = \frac{1}{8}\Xi_1^2 - R_{2I}^2 \quad (709)$$

$$= \frac{\Xi_1^2}{16\Xi_2^2}(\Xi_1 + \sqrt{2}\Xi_2)(\Xi_1 - \sqrt{2}\Xi_2) \quad (710)$$

$\Xi_1 < 2\Xi_2$ の条件より、 $R_{2R}R_{3R} < 0$ 。従って、 $R_{3R} < 0$ 。

ζ_{1R}, ζ_{1I} の値

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + R_{2R} + R_{3R} = \Xi_2 \quad (711)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} + R_{2R} - R_{3R} = \frac{\Xi_1^2}{2\Xi_2} \quad (712)$$

$$\zeta_{3R} = R_{1R} - R_{2R} - R_{3R} = 0 \quad (713)$$

$$\zeta_{4R} = R_{1R} - R_{2R} + R_{3R} = \Xi_2 - \frac{\Xi_1^2}{2\Xi_2} \quad (714)$$

$$\zeta_{1I} = R_{1I} + R_{2I} + R_{3I} = 2R_{2I} \quad (715)$$

$$\zeta_{2I} = R_{1I} + R_{2I} - R_{3I} = 0 \quad (716)$$

$$\zeta_{3I} = R_{1I} - R_{2I} - R_{3I} = -2R_{2I} \quad (717)$$

$$\zeta_{4I} = R_{1I} - R_{2I} + R_{3I} = 0 \quad (718)$$

非対称混合解 A_1 のときの $c_{\mu\mu}, c_{\mu\nu}, P_i w_i$ の値

$$c_{\mu\mu} = \frac{3}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} \quad (719)$$

$$c_{12} = \frac{1}{4\beta J} - \frac{1-a}{8} \quad (720)$$

$$c_{13} = -c_{12} \quad (721)$$

$$c_{23} = c_{12} \quad (722)$$

$$\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J & (\mu = \nu), (\mu, \nu) = (1, 3) \\ -\frac{1}{4} + \frac{1-a}{8}\beta J & (\mu, \nu) = (1, 2), (2, 3) \end{cases} \quad (723)$$

ここで、 $\gamma \equiv JN(\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J)$ とおく。以上よりヘッセ行列 \mathcal{H} は、式 (531) ~ (533) より、

$$\mathcal{H}_{1R1R} = \gamma - \frac{1}{4}JN(\beta J)^2 \{X_1 \Xi_2^2 + X_2 \frac{\Xi_1^4}{4\Xi_2^2}\} = \mathcal{H}_{2R2R} = \mathcal{H}_{3R3R} \equiv A \quad (724)$$

$$\mathcal{H}_{1R2R} = -\gamma - \frac{1}{4}JN(\beta J)^2 \{X_1 \Xi_2^2 + X_2 \frac{\Xi_1^4}{4\Xi_2^2}\} = \mathcal{H}_{2R1R} = A - 2\gamma \quad (725)$$

$$\mathcal{H}_{1R3R} = \gamma - \frac{1}{4}JN(\beta J)^2 \{X_1 \Xi_2^2 - X_2 \frac{\Xi_1^4}{4\Xi_2^2}\} = \mathcal{H}_{3R1R} \equiv B \quad (726)$$

$$\mathcal{H}_{2R3R} = -\gamma - \frac{1}{4}JN(\beta J)^2 \{X_1 \Xi_2^2 + X_2 \frac{\Xi_1^4}{4\Xi_2^2}\} = \mathcal{H}_{3R2R} = B - 2\gamma \quad (727)$$

$$\mathcal{H}_{1I1I} = \gamma - JN(\beta J)^2 R_{2I}^2 (X_1 + X_2) \equiv C \quad (728)$$

$$\mathcal{H}_{1I2I} = -\gamma - JN(\beta J)^2 R_{2I}^2 (X_1 - X_2) \equiv D \quad (729)$$

$$\mathcal{H}_{1I3I} = \gamma - JN(\beta J)^2 R_{2I}^2 (X_1 - X_2) = D + 2\gamma \quad (730)$$

$$\mathcal{H}_{2I3I} = -\gamma - JN(\beta J)^2 R_{2I}^2 (X_1 + X_2) = C - 2\gamma \quad (731)$$

$$\mathcal{H}_{1R1I} = -\frac{1}{4}JN(\beta J)^2 X_1 \zeta_{1R} \zeta_{1I} = \mathcal{H}_{1R2I} = \mathcal{H}_{1R3I} = \mathcal{H}_{2R3I} \equiv G \quad (732)$$

行列要素の並べ方を $1R, 2R, 3R, 1I, 2I, 3I$ として当てはめると、

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 2R & 3R & 1I & 2I & 3I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 3R \\ 1I \\ 2I \\ 3I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & A - 2\gamma & B & G & G & G \\ A - 2\gamma & A & B - 2\gamma & G & G & G \\ B & B - 2\gamma & A & G & G & G \\ G & G & G & C & D & D + 2\gamma \\ G & G & G & D & C & C - 2\gamma \\ G & G & G & D + 2\gamma & C - 2\gamma & C \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (733)$$

この行列の固有値を求める。回転対称性から、 $1I$ の成分を 0 としてもよい。

$$|\mathcal{H} - \lambda E| = \begin{vmatrix} A - \lambda & A - 2\gamma & B & G & G \\ A - 2\gamma & A - \lambda & B - 2\gamma & G & G \\ B & B - 2\gamma & A - \lambda & G & G \\ G & G & G & C - \lambda & C - 2\gamma \\ G & G & G & C - 2\gamma & C - \lambda \end{vmatrix} \quad (734)$$

計算すると、

$$= (2\gamma - \lambda) \begin{vmatrix} 2\gamma - \lambda & -4\gamma + 2\lambda & \lambda & 0 \\ 2A - 2\gamma - \lambda & 0 & -2A + 2B + \lambda & 2G \\ -2A + 2B + 2\gamma + \lambda & -4\gamma & 4A - 4B - \lambda & 0 \\ 2G & 0 & 0 & 2C - 2\gamma - \lambda \end{vmatrix} \quad (735)$$

この時点でわかる固有値は、

$$\lambda = 0, 2\gamma$$

これらの正負を確認する。

$$2\gamma = 2JN\left(\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J\right) \quad (736)$$

これが正であれば解は安定と言える。 $\beta = \frac{1}{T}$ なので、

$$\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J > 0 \quad (737)$$

$$T > \frac{(1-a)J}{2} \quad (738)$$

しかし非対称混合解 A_1 のとき、解の存在条件は $T < \frac{(1-a)J}{2}$ 。従って非対称混合解 A_1 は、不安定である。

7.5.2.6 非対称混合解 A_3 の安定性

回転対称性から $R_{1I} = 0$ を仮定する。このとき、式 (381)、(389) より、

$$R_{2R} = R_{3R}, R_{2I} = -R_{3I} \quad (739)$$

となる。

非対称混合解のときの u_l, R_{lR}, R_{lI}, R の値

$$u_1 = \frac{1}{(1+3a)\beta J}, \quad u_2 = u_4 = \frac{1}{(1-a)\beta J}, \quad u_3 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 0 \quad (740)$$

$$R_{1R}^2 = \frac{1}{4}\Xi_1^2, \quad R_{2R}^2 = \frac{1}{16}\Xi_1^2 = R_{3R}^2 \quad (741)$$

$$R_{2I}^2 = \frac{1}{16}(4\Xi_2^2 - \Xi_1^2) = R_{3I}^2 \quad (742)$$

$$R^2 = \frac{1}{4}(\Xi_1^2 + 2\Xi_2^2) \quad (743)$$

ここで $R_{1R} > 0$ を仮定する。 $a' = b' > 0$ より、 $R_{2R} = R_{3R} > 0$ 。 また、 $R_{2I}^2 > 0$ より、

$$\frac{1}{16}(2\Xi_2 + \Xi_1)(2\Xi_2 - \Xi_1) > 0 \quad (744)$$

$$\Xi_1 > 2\Xi_2 \quad (745)$$

という条件がわかる。

ζ_{lR}, ζ_{lI} の値

$$\zeta_{1R} = R_{1R} + 2R_{2R} = \Xi_1 \quad (746)$$

$$\zeta_{2R} = R_{1R} = \frac{1}{2}\Xi_1 \quad (747)$$

$$\zeta_{3R} = R_{1R} = \frac{1}{2}\Xi_1 \quad (748)$$

$$\zeta_{4R} = R_{1R} - 2R_{2R} = 0 \quad (749)$$

$$\zeta_{lI} = 0 \quad (750)$$

$$\zeta_{2I} = 2R_{2I} \quad (751)$$

$$\zeta_{3I} = -2R_{2I} \quad (752)$$

$$\zeta_{4I} = 0 \quad (753)$$

非対称混合解 A_3 のときの $c_{\mu\mu}, c_{\mu\nu}, P_l u_l$ の値

$$c_{\mu\mu} = \frac{3}{4\beta J} + \frac{1-a}{8} \quad (754)$$

$$c_{12} = \frac{1}{4\beta J} - \frac{1-a}{8} \quad (755)$$

$$c_{13} = c_{12} \quad (756)$$

$$c_{23} = -c_{12} \quad (757)$$

$$\delta_{\mu\nu} - \beta J c_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J & (\mu = \nu), (\mu, \nu) = (2, 3) \\ -\frac{1}{4} + \frac{1-a}{8}\beta J & (\mu, \nu) = (1, 2), (1, 3) \end{cases} \quad (758)$$

ここで、 $\gamma \equiv JN(\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J)$ とおく。以上よりヘッセ行列 \mathcal{H} は、式 (531) ~ (533) より、

$$\mathcal{H}_{1R1R} = \gamma - \frac{1}{4}JN(\beta J)^2\Xi_1^2(X_1 + \frac{1}{4}X_2) = \mathcal{H}_{2R2R} = \mathcal{H}_{3R3R} \equiv A \quad (759)$$

$$\mathcal{H}_{1R2R} = -\gamma - \frac{1}{4}JN(\beta J)^2\Xi_1^2(X_1 + \frac{1}{4}X_2) = \mathcal{H}_{2R1R} = A - 2\gamma \quad (760)$$

$$\mathcal{H}_{1R3R} = -\gamma - \frac{1}{4}JN(\beta J)^2\Xi_1^2(X_1 - \frac{1}{4}X_2) = \mathcal{H}_{3R1R} = -A - \frac{1}{2}JN(\beta J)^2X_1\Xi_1^2 \quad (761)$$

$$\mathcal{H}_{2R3R} = \gamma - \frac{1}{4}JN(\beta J)^2\Xi_1^2(X_1 - \frac{1}{4}X_2) = \mathcal{H}_{3R2R} = -A - \frac{1}{2}JN(\beta J)^2X_1\Xi_1^2 + 2\gamma \quad (762)$$

$$\mathcal{H}_{1I1I} = \gamma - JN(\beta J)^2X_2R_{2I}^2 \equiv B \quad (763)$$

$$\mathcal{H}_{1I2I} = -\gamma - JN(\beta J)^2X_2R_{2I}^2 = B - 2\gamma \quad (764)$$

$$\mathcal{H}_{1I3I} = -\gamma + JN(\beta J)^2X_2R_{2I}^2 = -B \quad (765)$$

$$\mathcal{H}_{2I3I} = \gamma + JN(\beta J)^2X_2R_{2I}^2 = -B + 2\gamma \quad (766)$$

$$\mathcal{H}_{1R1I} = -\frac{1}{4}JN(\beta J)^2X_2\zeta_{2R}\zeta_{2I} = \mathcal{H}_{1R2I} \equiv C \quad (767)$$

$$\mathcal{H}_{1R3I} = \frac{1}{4}JN(\beta J)^2X_2\zeta_{2R}\zeta_{2I} = \mathcal{H}_{2R3I} = -C \quad (768)$$

ここで、 $\omega \equiv \frac{1}{2}JN(\beta J)^2X_1\Xi_1^2$ とおく。行列要素の並べ方を $1R, 2R, 3R, 1I, 2I, 3I$ として当てはめると、

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1R & 2R & 3R & 1I & 2I & 3I \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1R \\ 2R \\ 3R \\ 1I \\ 2I \\ 3I \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & A-2\gamma & -A-\omega & C & C & -C \\ A-2\gamma & A & -A-\omega+2\gamma & C & C & -C \\ -A-\omega & -A-\omega+2\gamma & A & -C & -C & C \\ C & C & -C & B & B-2\gamma & -B \\ C & C & -C & B-2\gamma & B & -B+2\gamma \\ -C & -C & C & -B & -B+2\gamma & B \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (769)$$

この行列の固有値を求める。回転対称性から、 $1I$ の成分を 0 としてもよい。

$$|\mathcal{H} - \lambda E| = \begin{vmatrix} A - \lambda & A - 2\gamma & -A - \omega & C & -C \\ A - 2\gamma & A - \lambda & -A - \omega + 2\gamma & C & -C \\ -A - \omega & -A - \omega + 2\gamma & A - \lambda & -C & C \\ C & C & -C & B - \lambda & -B + 2\gamma \\ -C & -C & C & -B + 2\gamma & B - \lambda \end{vmatrix} \quad (770)$$

計算すると、

$$= -(2\gamma - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2A - 2\gamma - \lambda & -\omega - \lambda & 2C \\ -2 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -4A - 2\omega + 2\gamma + \lambda & 0 & -4C \\ 0 & 2C & 0 & 2B - 2\gamma - \lambda \end{vmatrix} \quad (771)$$

この時点でわかる固有値は、

$$\lambda = 0, 2\gamma(\text{重複度 } 2)$$

これらの正負を確認する。

$$2\gamma = 2JN\left(\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J\right) \quad (772)$$

これが正であれば解は安定と言える。 $\beta = \frac{1}{T}$ なので、

$$\frac{1}{4} - \frac{1-a}{8}\beta J > 0 \quad (773)$$

$$T > \frac{(1-a)J}{2} \quad (774)$$

しかし非対称混合解 A_3 のとき、解の存在条件は $T < \frac{(1-a)J}{2}$ 。従って非対称混合解 A_3 は、不安定である。

8 プログラム

8.1 温度依存性のプログラム (理論)

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define J 1.0
#define Tmax 1.0
#define a 0.1

#define dt 0.01          //温度の刻み幅
#define n 100           //ニュートン法の最大試行回数
#define e 0.00001       //ニュートン法の精度

void F(double x, double *I0x, double *I1x, double *I0xh, double *I1xh);

double I0(double x, double phi);
double I1(double x, double phi);
double I0h(double x, double phi);
double I1h(double x, double phi);

double h = 0.01;        //ニュートン法の刻み幅

double pi;

int main(void){
    FILE *file1;
    FILE *file2;

    int ii1, ii2;

    int i, t, k;
    double T;

    double I0x, I1x, I0xh, I1xh;

    double I, Ih;
```

```

double f, fh, df;
double A;

double sum;
double R, x1, x2;

double b;
double R1max, R1min;
double R1R, R2R, R1I, R2I;
double R1, R2;

pi = 4.0*atan(1.0);

file2 = fopen("p2a0_REN.txt","w");

x1 = 10.0;//初期値 (ニュートン法の開始ポイント)
x2 = 10.0;//初期値 (ニュートン法の開始ポイント)

for(t=0;t<Tmax/dt;t++){
    T = (t+1)*dt;

    for(i=0;i<n;i++){
F(x1, &I0x, &I1x, &I0xh, &I1xh);
I = I1x / I0x;
Ih = I1xh / I0xh;

f = x1*T/((1+a)*J) - I;
fh = (x1+h)*T/((1+a)*J) - Ih;

df = (fh-f)/h;
A = f / df;
x1 = x1 - A;
if(fabs(A)<e){
    ii1 = i;    //収束までにかかった試行回数
    break;
} // if 文おわり
    } // i のループおわり

//////////

```

```

        for(i=0;i<n;i++){
F(x2, &I0x, &I1x, &I0xh, &I1xh);
I = I1x / I0x;
Ih = I1xh / I0xh;

        f = x2*T/((1-a)*J) - I;
        fh = (x2+h)*T/((1-a)*J) - Ih;

df = (fh-f)/h;
A = f / df;
x2 = x2 - A;
if(fabs(A)<e){
        ii2 = i;        //収束までにかかった試行回数
        break;
} // if 文おわり
        } // iのループおわり

        sum = x1*x1 + x2*x2;
        R = sqrt(sum * 0.5)*T/J;
        R1 = x1*T/(2*J);

        b = pow(x1*T/J,2.0)-R*R;

        R1max = sqrt((R*R + sqrt(pow(R,4.0) - b*b))*0.5);
        R1min = sqrt((R*R - sqrt(pow(R,4.0) - b*b))*0.5);

        if(x2>0.000001){
                printf("%f %f \n", T, R);
                fprintf(file2,"%f %f \n", T, R);
        }
        }//Tのループ終わり
fclose(file2);
return 0;
}

/* シンプソンの公式でベッセル関数の積分を計算する */
void F(double x, double *I0x, double *I1x, double *I0xh, double *I1xh){

```

```

int j;

double aa, bb;
double h2 , nn;

double p1, p2, p3;
double q1, q2, q3;
double r1, r2, r3;
double s1, s2, s3;

double u;

pi = 4.0*atan(1.0);

aa = 0.0;
bb = pi;
nn = 4.0; //シンプソンの公式の精度
h2 = (bb-aa)/(2.0*nn);

p1 = I0(x,aa) + I0(x,bb);
q1 = I1(x,aa) + I1(x,bb);
r1 = I0h(x,aa) + I0h(x,bb);
s1 = I1h(x,aa) + I1h(x,bb);

p2 = 0.0;
q2 = 0.0;
r2 = 0.0;
s2 = 0.0;
for(j=0;j<nn;j++){
    u = aa + h2 * (2*j+1);

    p2 = I0(x,u) + p2;
    q2 = I1(x,u) + q2;
    r2 = I0h(x,u) + r2;
    s2 = I1h(x,u) + s2;
}

p3 = 0.0;
q3 = 0.0;

```

```

r3 = 0.0;
s3 = 0.0;
for(j=0;j<(nn-1.0);j++){
    u = aa + h2 * (2*j+2);

    p3 = I0(x,u) + p3;
    q3 = I1(x,u) + q3;
    r3 = I0h(x,u) + r3;
    s3 = I1h(x,u) + s3;
}

*I0x = (p1 + 4*p2 + 2*p3) * h2/(3*pi);
*I1x = (q1 + 4*q2 + 2*q3) * h2/(3*pi);
*I0xh = (r1 + 4*r2 + 2*r3) * h2/(3*pi);
*I1xh = (s1 + 4*s2 + 2*s3) * h2/(3*pi);
}

double I0(double x, double phi){
    double I00;
    I00 = exp(x*cos(phi));
    return I00;
}

double I1(double x, double phi){
    double I01;
    I01 = exp(x*cos(phi)) * cos(phi);
    return I01;
}

double I0h(double x, double phi){
    double I00h;
    I00h = exp((x+h)*cos(phi));
    return I00h;
}

double I1h(double x, double phi){
    double I01h;
    I01h = exp((x+h)*cos(phi)) * cos(phi);
    return I01h;
}

```

8.2 温度依存性のプログラム (数値計算)

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include <time.h>
#include "MT.h"

#define nMAX 10000
#define p 2
#define J 1.0
#define a 0.1
#define mcs 10000 //モンテカルロステップ
#define Tmax 2.0
#define h 0.05
#define samp 50

int main(void)
{
    FILE *fp;

    int t;
    double T;

    int n, i, j, k, l, lll;
    double phi[nMAX+1];
    double Rc[p+1], Rs[p+1];
    double newRc[p+1], newRs[p+1];
    double H;

    int z;
    int gzi[p+1][nMAX+1];
    double sig1, sig2;
    double N2Rc2, N2Rs2;

    double dphi, dH, cphi, cH;
    double cRc, cRs, cRc2, cRs2;
```

```

double r;
double B;
double pi = 4.0*atan(1.0);

double R[p+1];
double sum, RR;

double Xbar, RRbar;

double w2, w;
double s;
double q;

double Q, r1, r2;

/* 乱数の初期値 */
init_genrand(1);

/* 相関を決める確率 */
Q = (sqrt(a)+1)*0.5;

/* 横軸：温度 T */
for(t=0;t<Tmax/h;t++){
    T = (t+1)*h;
    B = 1/T;

/* gzi の計算 */
    for(i=0;i<nMAX;i++){
        r1 = genrand_real1();
        for(k=0;k<p;k++){
r2 = genrand_real1();
if(r1<0.5 && r2<Q) gzi[k+1][i+1] = 1.0;
if(r1<0.5 && r2>=Q) gzi[k+1][i+1] = -1.0;
if(r1>=0.5 && r2<Q) gzi[k+1][i+1] = -1.0;
if(r1>=0.5 && r2>=Q) gzi[k+1][i+1] = 1.0;
        }
    }
    RRbar = 0.0;
    w2 = 0.0;

```

```

////////////////////////////////////
/* サンプル平均 */
    for(q=0;q<samp;q++){

/* 初期値 */
    for(i=0;i<nMAX;i++){
phi[i+1] = 2 * pi * genrand_real1();
    }

/* 最初の Rc, Rs の計算 */
    N2Rc2 = 0.0;
    N2Rs2 = 0.0;
    for(k=0;k<p;k++){
sig1 = 0.0;
sig2 = 0.0;
for(i=0;i<nMAX;i++){
    sig1 = gzi[k+1][i+1] * cos(phi[i+1]) + sig1;
    sig2 = gzi[k+1][i+1] * sin(phi[i+1]) + sig2;
}
Rc[k+1] = sig1 / nMAX;
Rs[k+1] = sig2 / nMAX;
N2Rc2 = sig1 * sig1 + N2Rc2;
N2Rs2 = sig2 * sig2 + N2Rs2;
    }

/* 最初の H の計算 */
    H = -J * (N2Rc2 + N2Rs2) * 0.5/nMAX;

    Xbar = 0.0;
    for(l=0;l<mcs;l++){
/* z 番目をずらす */
for(n=0;n<nMAX;n++){
    z = nMAX * genrand_real2() + 1;

    dphi = 2 * pi * genrand_real1();
    cphi = phi[z] + dphi;

```

```

    cRc2 = 0.0;
    cRs2 = 0.0;
/* 次の Rc, Rs の候補の計算 */
    for(k=0;k<p;k++){
        cRc = Rc[k+1] + (gzi[k+1][z]*(cos(cphi)-cos(phi[z]))/nMAX);
        cRc2 = cRc * cRc + cRc2;

        cRs = Rs[k+1] + (gzi[k+1][z]*(sin(cphi)-sin(phi[z]))/nMAX);
        cRs2 = cRs * cRs + cRs2;

        newRc[k+1] = cRc;
        newRs[k+1] = cRs;
    }

/* 次の候補の H の計算 */
    cH = -J*nMAX*(cRc2 + cRs2)*0.5;
    dH = cH - H;

/* 採用 1 */
    if(dH<0){
        phi[z] = cphi;
        H = cH;
        for(k=0;k<p;k++){
            Rc[k+1] = newRc[k+1];
            Rs[k+1] = newRs[k+1];
        }
    }
/* 採用 2 */
    else{
        r = genrand_real1();
        if(r<exp(-B*dH)){
            phi[z] = cphi;
            H = cH;
            for(k=0;k<p;k++){
Rc[k+1] = newRc[k+1];
Rs[k+1] = newRs[k+1];
            }
        }
/* 不採用 */

```

```

    else;
}

/* 平均を取り始める中間地点の R */
if(l==mcs*0.5){
    sum = 0.0;
    for(k=0;k<p;k++){
        R[k+1] = sqrt(Rc[k+1]*Rc[k+1] + Rs[k+1]*Rs[k+1]);
        sum = R[k+1]*R[k+1] + sum;
    }
    RR = sqrt(sum);
    Xbar = RR;

    l11 = 1;
}
} //n の終わり

//後半の赤丸 (R) の平均
if(l>mcs*0.5){
/* R の平均の計算 */
    sum = 0.0;
    for(k=0;k<p;k++){
        R[k+1] = sqrt(Rc[k+1]*Rc[k+1] + Rs[k+1]*Rs[k+1]);
        sum = R[k+1]*R[k+1] + sum;
    }
    RR = sqrt(sum);

    Xbar = Xbar + (RR-Xbar)/(l11+1); //後半の赤丸の平均:Xbar1
    l11 = l11 + 1;
}
} //1 の終わり

RRbar = RRbar + (Xbar-RRbar)/(q+1.0);
w2 = Xbar*Xbar + w2;

} //一つの初期値終わり

w = w2 - samp*RRbar*RRbar;
s = sqrt(fabs(w)/(samp-1.0));

```

```

    printf("%f %f %f \n",T,RRbar,s);
    fprintf(fp,"%f %f %f \n",T,RRbar,s);
} //Tの終わり
return 0;
}

```

8.3 R_μ の時系列のプログラム

```

#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include <time.h>
#include "MT.h"

#define pMAX 100
#define nMAX 8000
#define J 1.0
#define T 0.1
#define a 0.0
#define mcs 20000 //モンテカルロステップ
#define samp 10 //サンプル数

int main(void)
{
    FILE *file1; /* ファイルポインタ */
    FILE *file2;
    FILE *fp;
    char filename1[20]; /* 20 はファイル名に必要な文字数 */
    char filename2[20];
    char filename3[20];

    int n, i, j, k, l, s;
    double phi[nMAX+1];
    double Rc[pMAX+1], Rs[pMAX+1];
    double newRc[pMAX+1], newRs[pMAX+1];
    double H;

    int z;

```

```

int gzi[pMAX+1][nMAX+1];
double sig1, sig2;
double N2Rc2, N2Rs2;

double dphi, dH, cphi, cH;
double cRc, cRs, cRc2, cRs2;

double B = 1/T;
double pi = 4.0*atan(1.0);

double R[pMAX+1];
double sum;
double RR, RRbar;

int p, q;
double MAX, max;

int first, second;

double Q;
double r1, r2;

double dRmu;

/* 相関を決める確率 */
Q = (sqrt(a)+1)*0.5;
////////////////////////////////////
for(q=2;q<=pMAX;q++){
    p = q;
/* 乱数の初期値 */
    init_genrand(1);

    sprintf(filename1,"p=%d.txt",p);
    file1 = fopen(filename1,"w");
    sprintf(filename2,"p=%d_time.txt",p);
    file2 = fopen(filename2,"w");
    sprintf(filename3,"p=%d_time_R.txt",p);
    fp = fopen(filename3,"w");

```

```

/* サンプル平均 */
    for(s=0;s<samp;s++){

/* gzi の計算 */
    for(i=0;i<nMAX;i++){
r1 = genrand_real1();
for(k=0;k<p;k++){
    r2 = genrand_real1();
    if(r1<0.5 && r2<Q) gzi[k+1][i+1] = 1.0;
    if(r1<0.5 && r2>=Q) gzi[k+1][i+1] = -1.0;
    if(r1>=0.5 && r2<Q) gzi[k+1][i+1] = -1.0;
    if(r1>=0.5 && r2>=Q) gzi[k+1][i+1] = 1.0;
}
    }
/* 初期値を連続解の状態から始める */
    for(i=0;i<nMAX*0.5;i++){
if(gzi[1][i+1]==1.0){
    phi[i+1] = 0.0;
}
else phi[i+1] = pi;
    }
    for(i=nMAX*0.5;i<nMAX;i++){
if(gzi[2][i+1]==1.0){
    phi[i+1] = 0.0;
}
else phi[i+1] = pi;
    }
/* 最初の Rc, Rs の計算 */
    N2Rc2 = 0.0;
    N2Rs2 = 0.0;
    for(k=0;k<p;k++){
sig1 = 0.0;
sig2 = 0.0;
for(i=0;i<nMAX;i++){
    sig1 = gzi[k+1][i+1] * cos(phi[i+1]) + sig1;
    sig2 = gzi[k+1][i+1] * sin(phi[i+1]) + sig2;
}
Rc[k+1] = sig1 / nMAX;
Rs[k+1] = sig2 / nMAX;

```

```

N2Rc2 = sig1 * sig1 + N2Rc2;
N2Rs2 = sig2 * sig2 + N2Rs2;
    }
/* 最初の R1,R2,R の計算 */
    sum = 0.0;
    for(k=0;k<p;k++){
R[k+1] = sqrt(Rc[k+1]*Rc[k+1] + Rs[k+1]*Rs[k+1]);
sum = R[k+1]*R[k+1] + sum;
    }
    RR = sqrt(sum);
/* 最初の H の計算 */
    H = -J * (N2Rc2 + N2Rs2) * 0.5/nMAX;

    for(l=0;l<mcs;l++){
/* z 番目をずらす */
for(n=0;n<nMAX;n++){
    z = nMAX * genrand_real2() + 1;
    dphi = 2 * pi * genrand_real1();
    cphi = phi[z] + dphi;

    cRc2 = 0.0;
    cRs2 = 0.0;
/* 次の Rc,Rs の候補の計算 */
    for(k=0;k<p;k++){
        cRc = Rc[k+1] + (gzi[k+1][z]*(cos(cphi)-cos(phi[z]))/nMAX);
        cRc2 = cRc * cRc + cRc2;

        cRs = Rs[k+1] + (gzi[k+1][z]*(sin(cphi)-sin(phi[z]))/nMAX);
        cRs2 = cRs * cRs + cRs2;

        newRc[k+1] = cRc;
        newRs[k+1] = cRs;
    }
/* 次の候補の H の計算 */
    cH = -J*nMAX*(cRc2 + cRs2)*0.5;
    dH = cH - H;
/* 採用 1 */
    if(dH<0){
        phi[z] = cphi;

```

```

    H = cH;
    for(k=0;k<p;k++){
        Rc[k+1] = newRc[k+1];
        Rs[k+1] = newRs[k+1];
    }
}
/* 採用 2 */
else{
    r1 = genrand_real1();
    if(r1<exp(-B*dH)){
        phi[z] = cphi;
        H = cH;
        for(k=0;k<p;k++){
Rc[k+1] = newRc[k+1];
Rs[k+1] = newRs[k+1];
        }
    }
}
/* 不採用 */
else;
}
} //n のループ

if((l+1)%100==0){
/* RmuMAX の計算、出力 */
    printf("%d ", l+1);
    fprintf(file2,"%d ",l+1);
    fprintf(fp,"%d ",l+1);

    MAX = -1;
    sum = 0.0;
    for(k=0;k<p;k++){
        R[k+1] = sqrt(Rc[k+1]*Rc[k+1] + Rs[k+1]*Rs[k+1]);

        printf("%f ",R[k+1]);
        fprintf(file2,"%f ",R[k+1]);

        sum = R[k+1]*R[k+1] + sum;

        if(MAX<R[k+1]){

```

```

        MAX = R[k+1];
        first = k+1;
    }
}

        RR = sqrt(sum);
        printf("%f ",RR);
fprintf(file2,"%f ",RR);
fprintf(fp,"%f \n",RR);

printf("\n");
fprintf(file2,"\n");

max = -1;
for(k=1;k<p+1;k++){
    if(max<R[k] && first!=(k)){
        max = R[k];
        second = k;
    }
}
dRmu = MAX - max;
printf("p=%d mcs=%d MAX=%f max=%f dRmu=%f \n", p, l+1, MAX, max, dRmu);
fprintf(file1,"%d %f %f %f \n", l+1, MAX, max, dRmu);
} //100 おきのmcs ループ終わり
    } //mcs のループ終わり
    printf("\n");
    fprintf(file1,"\n");
    printf("\n");
    fprintf(file2,"\n");
    printf("\n");
    fprintf(fp,"\n");
} //sample のループ終わり
fclose(file1); /* 最後に忘れずに閉じる */
fclose(file2); /* 最後に忘れずに閉じる */
fclose(fp); /* 最後に忘れずに閉じる */
} //p のループ終わり
return 0;
}

```

8.4 $p = 3$ での連続解の理論値 R

```
/* p3a0 理論 連続解 */
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define J 1.0
#define Tmax 1.0
#define a 0.1

#define dt 0.01          //温度の刻み幅
#define n 100           //ニュートン法の最大試行回数
#define e 0.00001       //ニュートン法の精度

void F(double x, double *I0x, double *I1x, double *I0xh, double *I1xh);

double I0(double x, double phi);
double I1(double x, double phi);
double I0h(double x, double phi);
double I1h(double x, double phi);

double h = 0.01;        //ニュートン法の刻み幅
double pi;

int main(void){
    FILE *file1;
    FILE *file2;

    int ii1, ii2;

    int i, t, k;
    double T;

    double I0x, I1x;
    double I0xh, I1xh;
    double I, Ih;
    double f, fh, df;
```

```

double A;
double sum;
double R, x1, x2;

double ad, b, c;
double R1min, R1max;
double R1R, R2R, R3R, R1I, R2I, R3I;
double R1, R2, R3;
double R3II, R33, R333;

double G1, G2;
double X, Y;

pi = 4.0*atan(1.0);

file2 = fopen("p3a0_REN.txt","w");

x1 = 20.0;//初期値 (ニュートン法の開始ポイント)
x2 = 20.0;//初期値 (ニュートン法の開始ポイント)

for(t=0;t<Tmax/dt;t++){
    T = (t+1)*dt;

    sum = 0.0;
    for(i=0;i<n;i++){
F(x1, &IOx, &I1x, &IOxh, &I1xh);
I = I1x / IOx;
Ih = I1xh / IOxh;

    f = x1*T/((1+3*a)*J) - I;
    fh = (x1+h)*T/((1+3*a)*J) - Ih;

df = (fh-f)/h;
A = f / df;
x1 = x1 - A;
if(fabs(A)<e){
    ii1 = i;
    break;
} // if 文おわり

```

```

    } // iのループおわり

//////////
    for(i=0;i<n;i++){
F(x2, &I0x, &I1x, &I0xh, &I1xh);
I = I1x / I0x;
Ih = I1xh / I0xh;

    f = x2*T/((1-a)*J) - I;
    fh = (x2+h)*T/((1-a)*J) - Ih;

df = (fh-f)/h;
A = f / df;
x2 = x2 - A;
if(fabs(A)<e){
    ii2 = i;
    break;
} // if文おわり
    } // iのループおわり

    sum = x1*x1 + 3*x2*x2;
    R = (sqrt(sum)* 0.5)*T/J;

printf("%f %f %f %f : %d %d \n", T, fabs(x1), fabs(x2), R, ii1, ii2);
fprintf(file2,"%f %f %f %f : %d %d \n", T, fabs(x1), fabs(x2), R, ii1, ii2);

    ad = (x1*x1 - x2*x2)*pow(T,2.0) / (8*pow(J,2.0));
    double RR = (sqrt(2)/4.0)*sqrt(24*a*a + 8 - 8*T/J); //近似

//    printf("%f %f %f \n", T, R, RR);
//    fprintf(file2,"%f %f %f \n", T, R, RR);
    }//Tのループ終わり
//fclose(file1);
fclose(file2);
    return 0;
}

/* シンプソンの公式でベッセル関数の積分を計算する */
void F(double x, double *I0x, double *I1x, double *I0xh, double *I1xh){

```

```

int j;
double aa, bb;
double h2 , nn;

double p1, p2, p3;
double q1, q2, q3;
double r1, r2, r3;
double s1, s2, s3;
double u;

pi = 4.0*atan(1.0);

aa = 0.0;
bb = pi;
nn = 4.0;           //シンプソンの公式の精度
h2 = (bb-aa)/(2.0*nn);

p1 = I0(x,aa) + I0(x,bb);
q1 = I1(x,aa) + I1(x,bb);
r1 = I0h(x,aa) + I0h(x,bb);
s1 = I1h(x,aa) + I1h(x,bb);

p2 = 0.0;
q2 = 0.0;
r2 = 0.0;
s2 = 0.0;
for(j=0;j<nn;j++){
    u = aa + h2 * (2*j+1);

    p2 = I0(x,u) + p2;
    q2 = I1(x,u) + q2;
    r2 = I0h(x,u) + r2;
    s2 = I1h(x,u) + s2;
}
p3 = 0.0;
q3 = 0.0;
r3 = 0.0;
s3 = 0.0;

```

```

for(j=0;j<(mn-1.0);j++){
    u = aa + h2 * (2*j+2);

    p3 = I0(x,u) + p3;
    q3 = I1(x,u) + q3;
    r3 = I0h(x,u) + r3;
    s3 = I1h(x,u) + s3;
}
*I0x = (p1 + 4*p2 + 2*p3) * h2/(3*pi);
*I1x = (q1 + 4*q2 + 2*q3) * h2/(3*pi);
*I0xh = (r1 + 4*r2 + 2*r3) * h2/(3*pi);
*I1xh = (s1 + 4*s2 + 2*s3) * h2/(3*pi);
}

double I0(double x, double phi){
    double I00;
    I00 = exp(x*cos(phi));
    return I00;
}
double I1(double x, double phi){
    double I01;
    I01 = exp(x*cos(phi)) * cos(phi);
    return I01;
}
double I0h(double x, double phi){
    double I00h;
    I00h = exp((x+h)*cos(phi));
    return I00h;
}
double I1h(double x, double phi){
    double I01h;
    I01h = exp((x+h)*cos(phi)) * cos(phi);
    return I01h;
}

```

参考文献

- [1] J. J. Hopfield: *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. **79** (1982) pp.2554-2558.
- [2] Warren S. McCulloch, and Walter H. Pitts: *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, W. Bull. of Math. Biophys. **5** (1943) pp. 115-133.
- [3] D. Hebb: *THE ORGANIZATION OF BEHAVIOR*, Wiley. (1949)
- [4] T. Kohonen: *Correlation Matrix Memories*, IEEE Transaction on Computers. C **21** (1972) pp. 353-359.
- [5] Daniel J. Amit, Hanoeh Gutfreund, and H. Sompolinsky: *Spin-glass models of neural networks*, Phys. Rev. A **32** (1985) pp. 1007-1018.
- [6] Daniel J. Amit, Hanoeh Gutfreund, and H. Sompolinsky: *Storing Infinite Numbers of Patterns in a Spin-Glass Model of Neural Networks*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) pp. 1530-1533.
- [7] John Hertz, Anders Krogh, Richard G. Palmer, *INTRODUCTION TO THE THEORY OF NEURAL COMPUTATION*, pp. 39-40.
- [8] T. Kimoto, T. Uezu, and M. Okada: *Continuous Attractor that Appears in Autoassociative Memory Model Extended to XY Spin System*, Journal of the Physical Society of Japan. **82** (2013) 124002, pp. 1-8.
- [9] 森口繁一、宇田川かね久 (「かね」は金偏に圭)、一松信: 『数学公式 III-特殊函数-』 (岩波全書) pp. 170-174.