2020年8月25日(火)

ベクトル解析 追試験問題

具体的な計算過程も全て記すこと。

I. $\boldsymbol{A} = (x^2, yz, xz)$、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする。

1. 以下の量を計算せよ。
   (1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$
   (2) $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$
   (3) $\nabla \times \boldsymbol{A}$

2. 以下の微分演算の結果がスカラーかベクトルかを答え、その値を求めよ。
   (1) $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ (2) $(\nabla r) \times \boldsymbol{r}$
   (3) $(\nabla r) \cdot \boldsymbol{r}$ (4) $\nabla \times \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

II. C^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について，次のことを示せ.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0.$$

III. 図のように，半径 a の無限に長い円筒導体内に，強さ I の定常電流が z 軸の正の向きに一様に流れているとする．磁場を $\boldsymbol{H}$，電流密度を $\boldsymbol{i}$ としたとき，マックスウェルの方程式の一つは,

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{1}$$

で与えられる。円筒座標を (ρ, ϕ, z) とし、基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z$ とする。

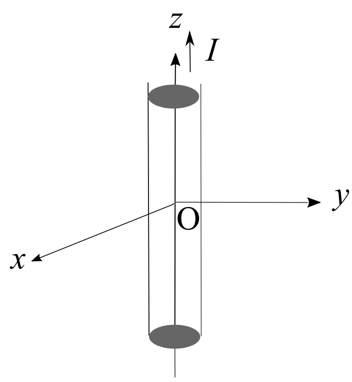
1. 円筒座標 (ρ, ϕ, z) の点における磁場 $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向を向き、大きさは ρ のみに依存することを説明せよ。
なお、強さ I の定常電流が作る磁場は、次のビオ・サバールの法則で与えられる。点 S のまわりの $d\boldsymbol{s}$ 部分を流れる電流が点 P に作る磁場 $d\boldsymbol{H}$ は、

$$d\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}'}{r'^3}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{r}'$ は、S から P に向かうベクトル $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$。

2. マックスウェルの方程式 (1) を用い，さらにストークスの定理を適用して，次の領域における磁場の $\boldsymbol{e}_\phi$ 成分，H_ϕ を求めよ。

(a) $\rho < a$ (b) $a \leq \rho$



IV. 内径 a、外径 b の中空の球に電荷 Q が**一様に**分布している。球の中心を原点 O として下図のように座標系をとる。

電場を $\boldsymbol{E}$，電荷密度を ρ，真空の誘電率を ε_0 としたとき，マックスウェルの方程式の一つは，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

で与えられる。球座標系を (r, θ, ϕ) とし、基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ とする。

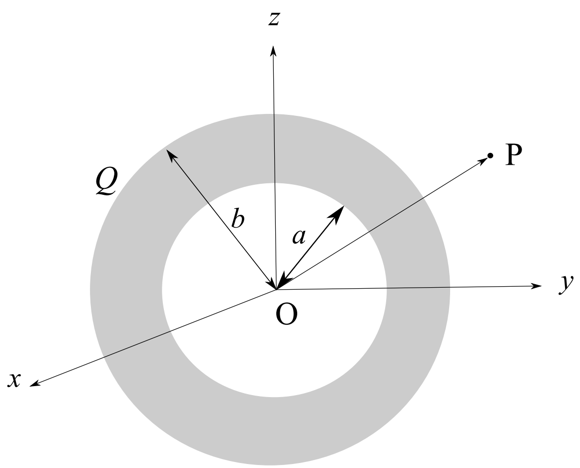
(1) 球座標 (r, θ, ϕ) の点 P における電場 $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{e}_r$ 方向を向き、大きさは r のみに依存することを説明せよ。なお、電荷が分布している領域内の点 S のまわりの体積 dV 部分の電荷 ρdV が点 P につくる電場 $d\boldsymbol{E}$ は、次のクーロンの法則に従う。

$$d\boldsymbol{E} = \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}$$

ここで、$\boldsymbol{r}' = \overrightarrow{\mathrm{SP}}, r' = |\boldsymbol{r}'|$.

(2) 式 (2) とガウスの定理を用いることにより、電場の $\boldsymbol{e}_r$ 成分 E_r を以下の場合について求めよ。

(a) $r < a$　(b) $a \leq r < b$　(c) $b \leq r$



V. 円筒座標系において，曲線座標は $(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \phi, z)$ である。以下の問いに答えよ。

1. デカルト座標系での座標 (x, y, z) を円筒座標系の座標 (ρ, ϕ, z) で表せ。 また、(ρ, ϕ, z) を図示せよ。

2. $i = 1, 2, 3$ について，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ を計算せよ。

3. $\boldsymbol{f}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$, $h_i = |\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}|$ とする。h_1, h_2, h_3 を求めよ。また，$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ は規格直交系をなすことを示せ。

VI. 次のことを証明せよ。

1. エルミート行列の固有値は実数である。

2. エルミート行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。